

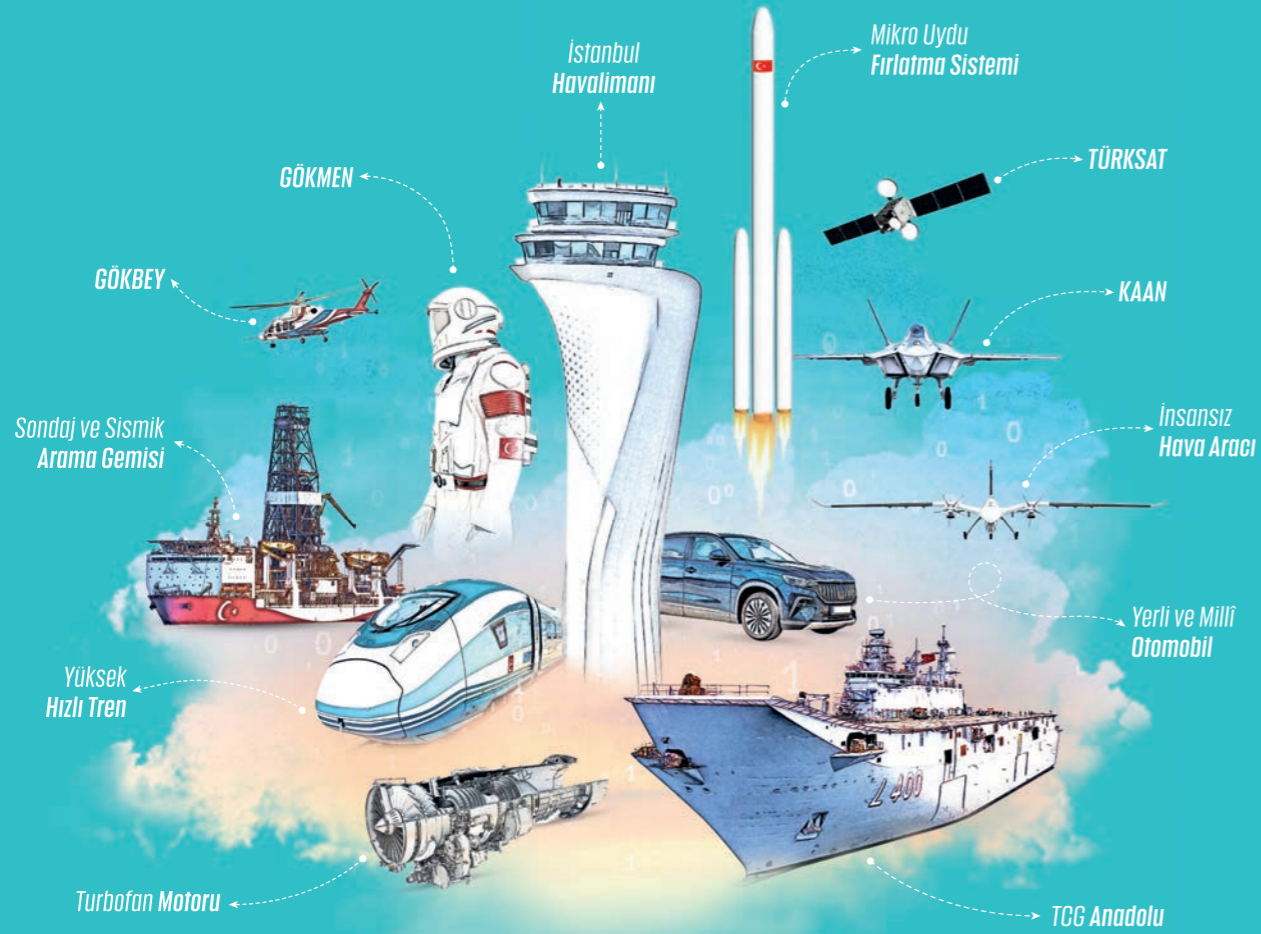
Bu kitaba sığmayan  
daha neler var!

**eba**  
www.eba.gov.tr



Karekodu okut, bu kitapla  
ilgili EBA içeriklerine ulaş!

Teknoloji Yolculuğumuz



**BU DERS KİTABI MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA  
ÜCRETSİZ OLARAK VERİLMİŞTİR.  
PARA İLE SATILAMAZ.**

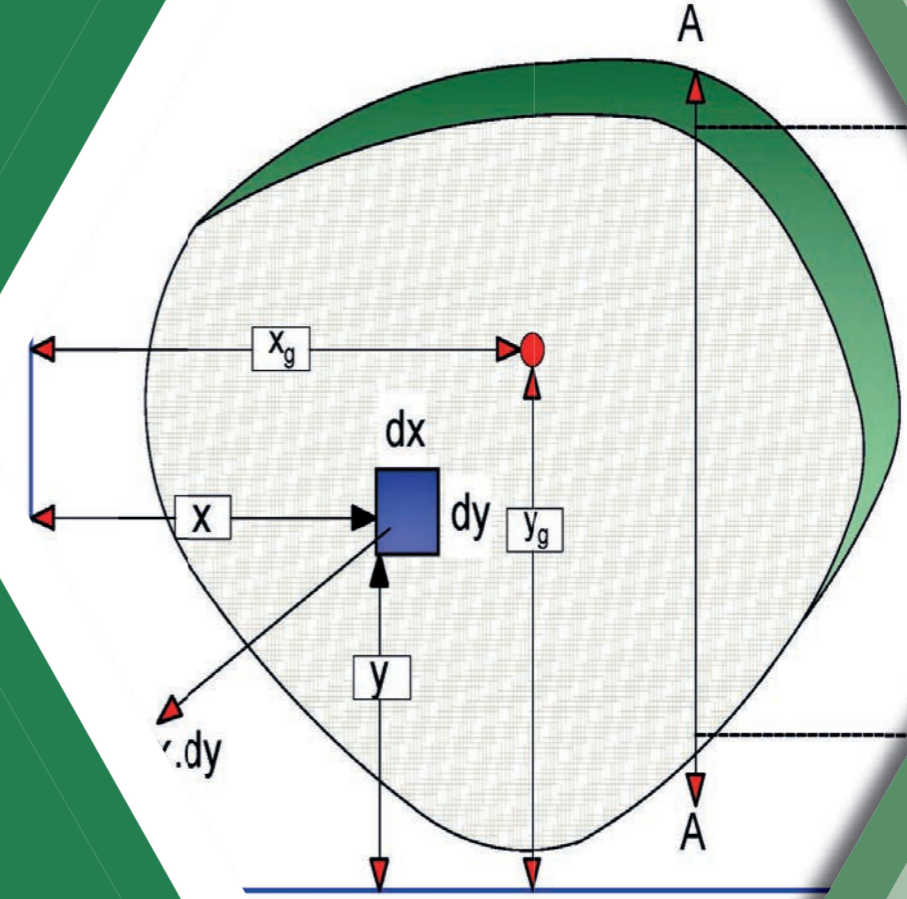
ISBN:978-975-11-6835-1

Bandrol Uygulamasına İlişkin Usul ve Esaslar Hakkında Yönetmeliğin Beşinci Maddesinin  
İkinci Fıkrası Çerçevesinde Bandrol Taşınması Zorunlu Değildir.

İNŞAAT TEKNOLOJİSİ ALANI YAPI STATİK HESAPLARI 11-12 DERS MATERYALİ

MESLEKİ VE TEKNİK ANADOLU LİSESİ  
İNŞAAT TEKNOLOJİSİ ALANI

# YAPI STATİK HESAPLARI



**11  
12  
DERS  
MATERYALİ**



MESLEKİ VE TEKNİK ANADOLU LİSESİ

İNŞAAT TEKNOLOJİSİ ALANI  
YAPI STATİK HESAPLARI

11-12

DERS MATERYALİ

**Yazarlar**

FATİH YILDIRIM  
SEYDİ AHMET GÖKTAŞ  
SUAT ARIK  
YURDANUR KAYA



MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ..... : 8512  
YARDIMCI VE KAYNAK KİTAPLAR DİZİSİ ..... : 2404

Her hakkı saklıdır ve Millî Eğitim Bakanlığına aittir. Ders materyalinin metin, soru ve şekilleri kısmen de olsa hiçbir surette alınıp yayımlanamaz.

**HAZIRLAYANLAR**

**DİL UZMANI**  
KORAY GÜNGÖR

**ÖLÇME DEĞERLENDİRME UZMANI**  
TÜLAY ENGİN

**REHBERLİK UZMANI**  
FİKRET ÖTÜNÇ

**GÖRSEL TASARIM UZMANI**  
ALKIN TÜRKMEN

**ISBN:978-975-11-6835-1**

Millî Eğitim Bakanlığının 24.12.2020 gün ve 18433886 sayılı oluru ile Meslekî ve Teknik Eğitim Genel Müdürlüğünce ders materyali olarak hazırlanmıştır.

**BASKI**

Ayrıntı Basım Yayım ve Mat. Hiz. Sanayi Ticaret A.Ş.  
Saray Mahallesi 126. Cadde No: 20  
Kahramankazan/Ankara  
**Sertifika No: 49599**



## İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;  
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.  
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;  
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!  
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?  
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.  
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.  
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!  
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.  
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,  
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.  
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,  
Medeniyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;  
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.  
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;  
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:  
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.  
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:  
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?  
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!  
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,  
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:  
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.  
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-  
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,  
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,  
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'sım;  
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!  
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.  
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;  
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;  
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

**Mehmet Âkif Ersoy**

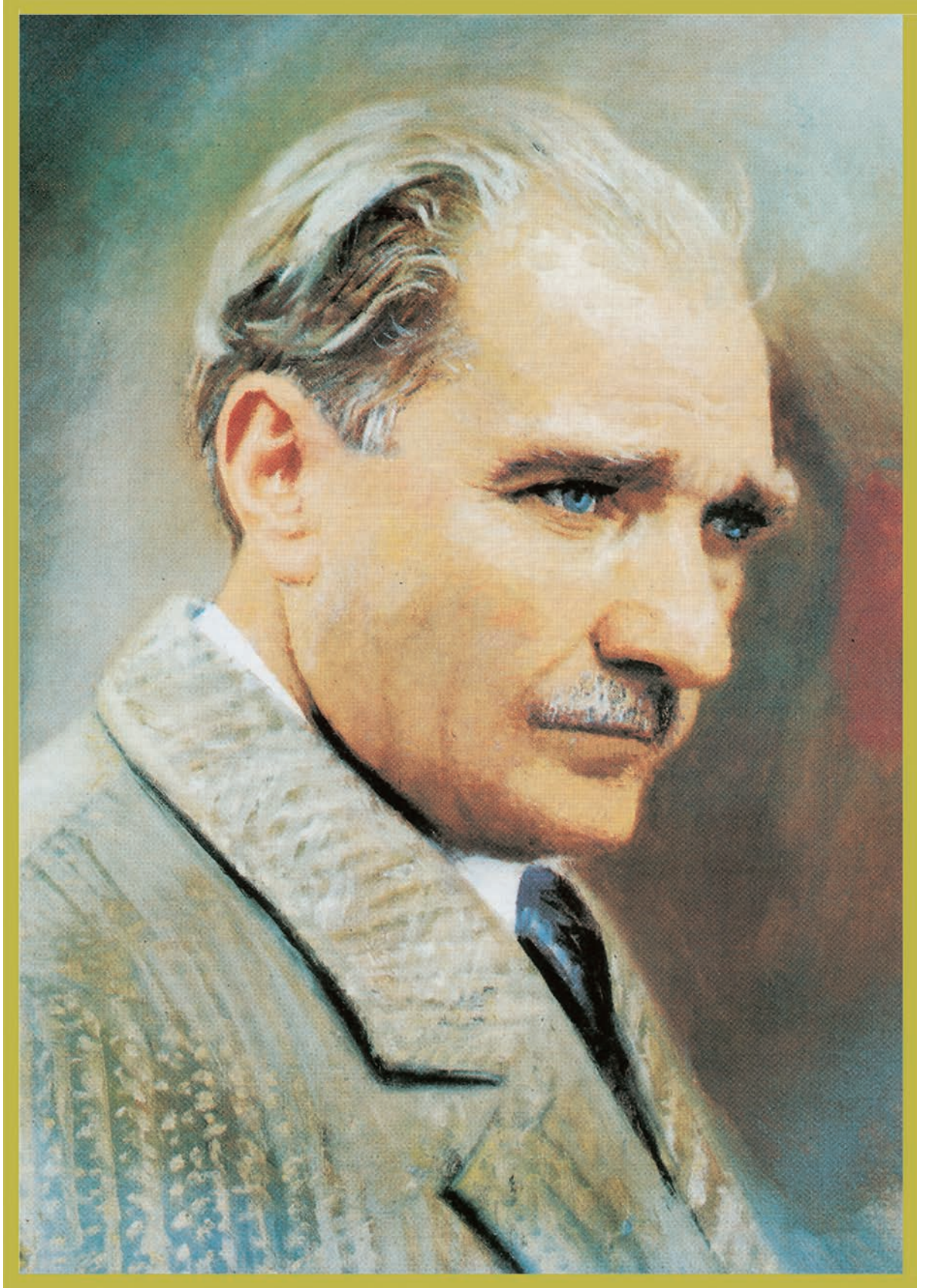
## GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsaît bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK



# İÇİNDEKİLER

DERS MATERYALİNİN TANITIMI.....11

## 1. ÖĞRENME BİRİMİ

### Kuvvet ve Bileşke Hesapları



<b>1.1. BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI.....</b>	<b>16</b>
1.1.1. Statiğin Temel İlkeleri.....	19
1.1.2. Bileşke Kuvvetler ve Hesaplama Yöntemleri.....	20
1.1.3. Bileşke Kuvvet Hesapları.....	20
1.1.3.1. Doğrultuları Aynı Olan Kuvvetlerin Bileşkesi.....	20
1.1.3.2. Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin Cosinüs Teoremi İle Hesaplanması.....	20
1.1.3.3. Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin Kuvvetler Paralelkenarı ve Kuvvetler Üçgeni Yöntemiyle Bulunması.....	22
1.1.3.4. Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin İzdüşüm Yöntemiyle Bulunması.....	24
1.1.3.5. Kesişen İki Kuvvetin Çok Kuvvetin Bileşkesinin Bulunması.....	26
1.1.3.6. Paralel Kuvvetlerin Bileşkesi.....	30
<b>1.2. UYGULAMA : BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI.....</b>	<b>32</b>
<b>1.3. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA.....</b>	<b>36</b>
1.3.1. Denge Türleri ve Şartları.....	36
1.3.1.1. Hesap Yöntemiyle Kuvvetlerin Bileşenlerine Ayrılması.....	36
1.3.1.2. Sinüs (Lami-Sinüs) Teoremi ile Kuvvetlerin Bileşenlerine Ayrılması.....	37
1.3.1.3. Kuvvetin İpçik (İp Poligonu veya Füniküler) Çokgeni Yöntemiyle Bileşenlerine Ayrılması.....	40
1.3.1.4. İzdüşüm Yöntemiyle Kuvvetlerin Bileşenlerine Ayrılması.....	41
<b>1.4. UYGULAMA : KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA HESAPLARI.....</b>	<b>42</b>
<b>1.5. UYGULAMA : KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA VE BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI.....</b>	<b>44</b>
<b>1. ÖĞRENME BİRİMİ ÖLÇME DEĞERLENDİRME SORULARI.....</b>	<b>47</b>

## 2. ÖĞRENME BİRİMİ

### Denge ve Moment Hesapları



<b>2.1. DENGE HESAPLARI.....</b>	<b>50</b>
2.1.1. Denge Türleri ve Şartları.....	50
<b>2.2. UYGULAMA : DENGE HESAPLARI.....</b>	<b>61</b>
<b>2.3. MOMENT HESAPLARI.....</b>	<b>63</b>
2.3.1. Noktaya Göre Moment.....	63
2.3.2. Eksene Göre Moment.....	64
2.3.3. Paralel Kuvvetlerde Bileşke ve Yerinin Bulunması.....	66
2.3.4. Varignon Teoremi.....	66
2.3.5. Kuvvet Çifti ve Kuvvet Çiftinin Momenti.....	68
<b>2.4. UYGULAMA : MOMENT HESAPLARI.....</b>	<b>69</b>
<b>2.5. UYGULAMA : DENGE VE MOMENT HESAPLARI.....</b>	<b>73</b>
<b>2. ÖĞRENME BİRİMİ ÖLÇME DEĞERLENDİRME SORULARI.....</b>	<b>75</b>

## 3. ÖĞRENME BİRİMİ

### Ağırlık Merkezi Hesapları



<b>3.1. YÜZEYLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI.....</b>	<b>78</b>
3.1.1. Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesap Yöntemleri.....	78
3.1.1.1. Basit Geometrik Yüzeylerin Ağırlık Merkezleri.....	79
3.1.1.2. Basit Geometrik Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesapları.....	83
3.1.1.3. Bileşik Geometrik Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesapları.....	85
<b>3.2. UYGULAMA : YÜZEYLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI.....</b>	<b>91</b>
<b>3.3. CİSİMLERİN VE YAPI ELEMANLARININ AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI.....</b>	<b>96</b>
3.3.1. Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi Hesap Yöntemleri.....	96
3.3.1.1. Basit Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi.....	96
3.3.1.2. Birleşik Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi.....	98
3.3.2. Birleşik Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi Hesapları.....	102
<b>3.4. UYGULAMA : BİRLEŞİK CİSİMLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI.....</b>	<b>104</b>
<b>3.5. UYGULAMA : YAPI ELEMANLARININ AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI.....</b>	<b>107</b>
<b>3. ÖĞRENME BİRİMİ ÖLÇME DEĞERLENDİRME SORULARI.....</b>	<b>110</b>

## 4. ÖĞRENME BİRİMİ

### Mesnetlerde-Kirişlerde Tepki Kuvveti ve Diyagramlar



<b>4.1. MESNETLERİN TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA.....</b>	<b>114</b>
4.1.1. Mesnet ve Mesnet Tepkisi Çeşitleri.....	114
4.1.2. Taşıyıcı Sistemleri ve Mesnetleri Etkileyen Yükler.....	117
4.1.3. Mesnetlerin Tepki kuvvetlerini Hesaplama Yöntemleri.....	118
4.1.3.1. Mesnetlerin Tepki kuvvetlerini Hesaplama.....	118
<b>4.2. UYGULAMA : MESNETLERİN TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA.....</b>	<b>121</b>
<b>4.3. KİRİŞLERİN MESNET TEPKİLERİNİ HESAPLAMA.....</b>	<b>125</b>
4.3.1. İzostatik Kirişlerde Mesnet Tepkilerini Hesaplama Yöntemleri.....	125
4.3.2. Dolu Gövdeli İzostatik Taşıyıcı Sistemlerde Mesnet Tepkileri Hesaplama.....	125
4.3.3. Üç Mafsallı İzostatik Çerçevesel ve Kemerlerde Mesnet Tepkileri Hesaplama.....	131
4.3.4. Gerber Kirişlerinde Mesnet Tepkileri Hesaplama.....	134
4.3.5. Kafes Kiriş Sistemlerinde Mesnet Tepkileri Hesaplama.....	136
<b>4.4. UYGULAMA : BASİT VE ÇIKMALI KİRİŞLERDE TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA.....</b>	<b>138</b>
<b>4.5. UYGULAMA : ÇERÇEVE VE KEMER SİSTEMİ KİRİŞLERİNDE TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA.....</b>	<b>141</b>
<b>4.6. KİRİŞLERDE KUVVET DİYAGRAMLARINI ÇİZME.....</b>	<b>144</b>
<b>4.7. UYGULAMA : KİRİŞLERDE KUVVET DİYAGRAMLARINI ÇİZME.....</b>	<b>153</b>
<b>4. ÖĞRENME BİRİMİ ÖLÇME DEĞERLENDİRME SORULARI.....</b>	<b>156</b>
<b>SÖZLÜK.....</b>	<b>159</b>
<b>KAYNAKÇA.....</b>	<b>161</b>
<b>CEVAP ANAHTARI.....</b>	<b>162</b>

# DERS MATERYALİNİN TANITIMI

**1. ÖĞRENME BİRİMİ**

## KUVVET VE BİLEŞKE HESAPLARI

**KONULAR**

- 1.1. BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI
- 1.2. BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI UYGULAMASI
- 1.3. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA
- 1.4. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA HESAPLARI UYGULAMASI
- 1.5. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA VE BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI UYGULAMASI

**NELER ÖĞRENECEKSİNİZ ?**

- Yatay, düşey ve eğik konumlu kuvvetlerin bileşke hesapları
- Yatay, düşey ve eğik konumlu kuvvetlerin bileşke hesap uygulamaları
- Yatay, düşey ve eğik konumlu kuvvetlerin bileşkenlerine ayrılması
- Yatay, düşey ve eğik konumlu kuvvetlerin bileşkenlerine ayırma uygulamaları

**TEMEL KAVRAMLAR**  
bileşke, bileşke, cosinüs teoremi, kuvvet, kuvvetler çokgeni, kuvvetler üçgeni, kuvvetlerin bileşkenleri, kuvvetlerin bileşkesi, kuvvetlerin izdüşümü, kütle çekim kuvveti, lami-sinüs teoremleri, statikün temel ilkeleri, yer çekim kuvveti

Konu başlıklarını gösterir

Konu görsellerini gösterir.

Konu metinlerini gösterir.

Konu alt başlıklarını gösterir.

Görsel açıklamalarını gösterir.

Sayfa numaralarını gösterir.

**AMAÇ**  
Yapı statik hesap kurallarına göre kuvvetlerin bileşenlerine ayırmak.

**ÖLÇÜŞ**  
Açısal konumda olan bir kuvvetin  $x$  ve  $y$  eksenleri üzerinde ayrılmış iki kuvvet şeklinde ve dik konumda olan bir kuvvetin iki ayrı dik bileşene ayrılması, kuvvetin bileşenlerine ayrılması olarak tanımlanır. Bir kuvveti bileşenlerine ayırmak, o kuvveti birbirine dik veya paralel iki kuvvet şeklinde ifade etmektir. Kuvvetleri bileşenlerine ayırmak, cisimlere etkiyen yatay ve dikey kuvvetlerin değerlerini belirlemesini sağlar.

**HAZIRLIK ÇALIŞMALARI**

- Çözümlerde yapı elemanlarını ve cisimleri etkileyen kuvvetleri tespit ediniz.
- Tespit ettiğiniz bu kuvvetleri bileşenlerine nasıl ayırabileceğinizi düşününüz ve bunları arkadaşlarınızla paylaşınız.

**1.3. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA**  
Bilgiye kuvvetin meydana gelmesinde etkili olan kuvvetlerin her birine bileşen kuvvet denir.

Şekil 1.43'te verilen ankastre sistemde, A ve B noktalarına etki eden kuvvetlerin R kuvveti bileşenlerine ayrılması görülmektedir.

**1.3.1. Kuvvetleri Bileşenlere Ayırma Yöntemleri**  
Kuvvetin bileşenlere ayrılmasında çeşitli yöntemler kullanılır. Bunlar; Hesap Yöntemi, Üçüç Çözümleri (İp Poligonu veya Funksiyöler Çözümleri), Sinüs (Lami-Sinüs) Teoremi ve İki Düşey Yöntemidir.

36

**1.3.1.1. Hesap Yöntemiyle Kuvvetlerin Bileşenlerine Ayrılması**  
Şekil 1.44'te görülen P kuvvetinin belirli mesafelerdeki bileşenleri;  $P_x = P \times L_1 / L$  ve  $P_y = P \times L_2 / L$  bağıntıları kullanılarak hesaplanır.

**Problem:** Şekil 1.45'te verilen kuvvetin bileşenlerinin değerlerini hesaplayınız.

**Çözüm:**  
 $P_x = P \times L_1 / L = 800 \times 3 / 5$  olduğuna göre  $P_x = 480$  kg  
 $P_y = P \times L_2 / L = 800 \times 2 / 5$  olduğuna göre  $P_y = 320$  kg

37





# 1.

ÖĞRENME  
BİRİMİ

## KUVVET VE BİLEŞKE HESAPLARI

### KONULAR

1.1. BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI

1.2. BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI UYGULAMASI

1.3. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA

1.4. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA HESAPLARI UYGULAMASI

1.5. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA VE BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI UYGULAMASI

### NELER ÖĞRENECEKSİNİZ ?

- Yatay, düşey ve açısal konumlu kuvvetlerin bileşke hesapları
- Yatay, düşey ve açısal konumlu kuvvetlerin bileşke hesap uygulamaları
- Yatay, düşey ve açısal konumlu kuvvetlerin bileşenlerine ayrılması
- Yatay, düşey ve açısal konumlu kuvvetlerin bileşenlerine ayırma uygulamaları

### TEMEL KAVRAMLAR

bileşen, bileşke, cosinüs teoremi, kuvvet, kuvvetler çokgeni, kuvvetler üçgeni, kuvvetlerin bileşenleri, kuvvetlerin bileşkesi, kuvvetlerin izdüşümü, kütle çekim kuvveti, lami-sinüs teoremleri, statığın temel ilkeleri, yer çekim kuvveti





## HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Çevrenizde bulunan yapıları, yapı elemanlarını, cisimleri inceleyiniz ve incelediğiniz yapı, yapı elemanları ve cisimlerin listesini hazırlayınız.
- Yapı elemanlarını ve cisimleri etkileyen kuvvetlerin neler olabileceğini araştırınız ve bunları arkadaşlarınızla paylaşınız.

## 1.1. BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI

Kuvvetlerin etkisi altındaki cisimlerin denge koşullarını inceleyen bilim dalına **statik** denir. Statik bilimi, durgun cisimlerin kuvvetlerin etkisi altındaki davranışlarını ve etkilenme durumlarını inceler. Yapı sistemlerinin belirli bir güvenlikte, yeterli rijitlikte ve en ekonomik boyutlandırmayı esas alan statik biliminin koluna **yapı statığı** denir. Yapı sisteminde, dış etkiler ya da iç etkiler nedeniyle oluşan kuvvetleri hesaplamak yapı statığının ana prensibidir. Buradaki amaç; statığı hesaplanan bir yapı sistemini, inşa edileceği malzemeye göre boyutlandırmaktır.

Yapı sistemi boyutlandırılırken aşağıda açıklanan unsurların dikkate alınması gerekli ve şarttır.

**Rijitlik:** Bir sistemin dış etkiler tesirinde hareketsiz kalabilme yeteneğidir.

**Güvenlik:** Bir sisteme etkileyen dış etkilerden dolayı oluşan zorlamalar ve yapının taşıyabileceği yüklemelerden belirli bir oranda uzaklıkta olmalıdır.

**Ekonomiklik:** Yapı sisteminin istenen güvenlikte ve en az maliyetle imal edilmesi prensibi benimsenir.

Bu öğrenme biriminde statik ve yapı statığı hesapları için yüklerin kuvvet gösterimleri, kuvvetin elemanları, kuvvetlerin bileşkeleri ve kuvvetlerin bileşenlerine ayırma ile ilgili konulara değinilecektir. Hareketin nedeni olarak düşünülen fiziksel etkenin matematiksel olarak ifadesi kuvvet olarak adlandırılır. Bir kuvvet; başlangıç (uygulama) noktası, doğrultusu, yönü ve şiddeti ile bir bütündür. Kuvvetin birimi; Newton (N), Kilo Newton (kN), Kilogram (kg), Ton (t) vb. şekillerde ifade edilir. Kuvvet genellikle P veya F harfi ile gösterilir.

Kuvvet, genel olarak bir cismin diğerine uyguladığı itme veya çekme etkisi şeklinde düşünülebilir. Bu etkileşim, cisimler birbirine temas ederken veya cisimler fiziksel olarak ayrı iken belirli bir mesafe üzerinden gerçekleşebilir. Günlük yaşamda kuvvet her alanda kullanılır. Öğrencinin kitaplarını taşıması, öğretmenin çantasını taşıması, kapının kapatılması veya açılması, pencerenin kapatılması veya açılması, suyun akışı, bir aracın hareket etmesi, bir uçağın havalanması kuvvet gerektiren durumlardır. Evrendeki bütün itme ve çekme olaylarının temelinde kuvvet vardır.

Kuvvet, bir cisme temas ederek olabileceği gibi temas etmeden de meydana gelebilir. Dünya ve Güneş'in birbirlerini çekmesi, Ay'ın yer çekimi kuvveti, mıknatısların maddeleri çekmesi ve elektromanyetik çekim gibi kuvvetler temas gerektirmeden oluşan kuvvetlerdir. Bu nedenle kuvvet; fiziksel, kimyasal ve biyolojik sistemlerin temel özelliği olarak karşımıza çıkmaktadır.

**Kütle Çekim Kuvveti:** Evrendeki herhangi iki cismin kütlelerinden dolayı birbirine uyguladığı kuvvete denir. Kütle ne olursa olsun doğadaki bütün kütleler birbirini çeker.

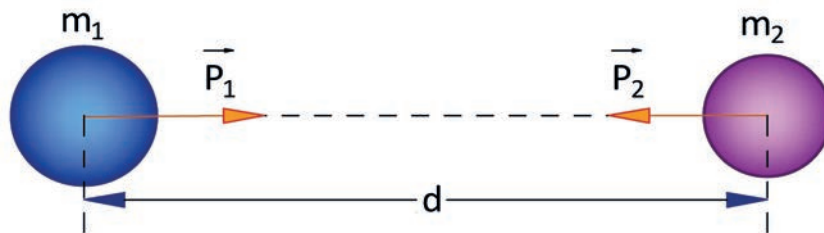
Kütle çekim kuvvetinin özellikleri aşağıda sıralanmıştır.

- Kütle çekim kuvveti, maddelerin birbirini çekmesidir.
- Kütle çekim kuvvetinin etki alanı büyüktür. Güneş, Dünya'yı çok uzak mesafede olsa da çeker.
- Kütle çekim kuvveti, doğadaki en zayıf kuvvetlerden biridir. Bundan dolayı ancak büyük kütleli cisimler arasındaki kütle çekim kuvveti hissedilebilir.
- Güneş'in etrafında gezegenleri, gezegenlerin etrafında uyduları tutan kuvvet, kütle çekim kuvvetidir.
- Dünya yüzeyinde durmamızı kütle çekim kuvveti sağlar.
- Kütle çekim kuvveti temas gerektirmez.

**Kütle Çekim Kanunu:** Belirli bir yükseklikten cismin yere düşmesi, yüksekten atlayan kişilerin yere doğru hareket etmesi, yağmur ve karın yere düşmesi Dünya'nın kütle çekiminden kaynaklanır. İki kütle birbirini çeker. **Aristo**, cisimlerin yere düşmesinin sebebini sahiplik kavramı olan Dünya'nın cisimlere sahip çıkması olarak açıklamış ve bu görüşü **Galileo** geliştirmiştir.

Bu olay **Newton** tarafından **Kütle Çekim Yasası** olarak yasalaştırılmıştır.

**Newton'un Evrensel Kütle Çekim Yasası:** Her bir noktasal kütle diğer noktasal kütleyi, ikisini birleştiren bir çizgi doğrultusundaki bir kuvvet ile çeker. Yani  $m_1$  ve  $m_2$  kütleli iki cismin birbirine uyguladığı kütle çekim kuvveti, cisimlerin kütlelerinin çarpımıyla doğru, aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılıdır.



Şekil 1.1: Kütle Çekim Kanunu

Şekil 1.1'de görülen cisimlerin birbirine uyguladığı kütle çekim kuvveti, kütleler ne olursa olsun eşit ve zıt yönde olur.

Kütle çekim kuvvetinin büyüklüğü:  $P_1 = -P_2 = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$

Bağıntıdaki "G" değeri evrensel çekim sabiti olup değeri  $6,6 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 / \text{kg}^2$  dir. Uzaklık olarak cisimlerin merkezlerinin uzaklığı metre cinsinden alınır. Kütle birimi kg alındığında kuvvetin birimi Newton (N) olur.

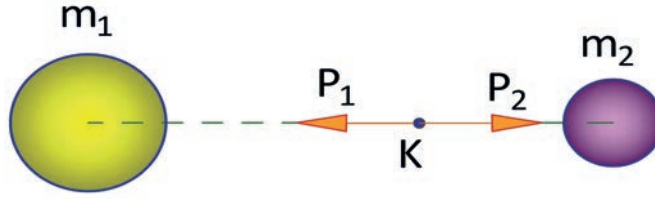
"G" evrensel çekim sabiti değerini hesaplamak için **Newton**, Dünya'nın yoğunluğunu tahmin etmiştir. Dünya'nın toplam kütlelerini bulduktan sonra, yeryüzündeki yerçekimi ivmesinin değerinden ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ) kütle çekim sabitini elde etmiştir.

Ancak burada sorun, Dünya'nın merkezi dâhil her yerindeki yoğunluğunun bilinme imkânının olmamasıdır. Çünkü Dünya'yı tartmak mümkün değildir. "G" evrensel çekim sabitinin değeri **Newton**'un ölümünden 71 yıl sonra 1798'de **Henry Cavendish** tarafından ölçülmüştür.

$$G = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 / \text{kg}^2$$



İki kütle arasındaki bir noktada çekim kuvvetinin sıfır olduğu bir nokta vardır. O noktada tutulan cisimlerin ağırlığı sıfır olur. Aşağıda verilen Şekil 1.2’de “K” noktasında  $P_1 = P_2$  olması durumunda cisimlerin ağırlığı da sıfır olur.



Şekil 1.2: Kütle çekim kuvvetinin sıfır olduğu yer

### Yer Çekimi Kuvveti

Cisimlere Dünya’nın etkidiği çekim kuvvetine **yer çekimi kuvveti** denir. Yer çekimi kuvveti Dünya’nın merkezine olursa olursun Dünya’nın merkezine doğrudur. Bu kuvvete cisimlerin **ağırlık kuvveti** denir.

Dünya’nın “m” kütleli bir cisme uyguladığı çekim kuvveti:  $P_1 = G \cdot \frac{m_d \cdot m}{r_d^2}$

Yer çekimi kuvveti Dünya’nın her yerinde aynı değildir. Dünya kutuplardan basık olduğu için en fazla çekim kutuplarda, en az ise Ekvator’dadır. Bu nedenle Ekvator’a yaklaştıkça cisimlerin ağırlıkları azalır, Ekvator’dan uzaklaştıkça ağırlıkları artar. Haberleşme uydularının Dünya’nın etrafında sabit bir yörüngede dönmesi, evrendeki yıldız, gezegen ve uydularının denge içinde hareketini sürdürmesi, Dünya’daki bütün cisimlerin dünyaya doğru düşmesi kütle çekim kuvvetinden kaynaklanmaktadır.

Gel git olayı, Dünya ile Ay arasındaki kütle çekim kuvvetinin etkisi ile gerçekleşir. Ay ve Güneş’in Dünya üzerinde oluşturduğu çekim kuvveti nedeniyle deniz ya da okyanus suyu kabarır ve bir süre sonra eski hâline geri gelir.

Gel git olayı 12 saat 25 dakika aralıklarla gerçekleşir. Dünya, Ay ve Güneş’in aynı doğrultuya geldikleri yeni ay ve dolunay konumlarında suların kabarması maksimum hâle gelir. Eğer Ay’da su olsaydı aynı olay Ay’da da gerçekleşirdi. Çünkü Dünya da Ay’ı aynı kuvvetle çekmektedir.

### Kuvvet ve Vektörel Gösterimi

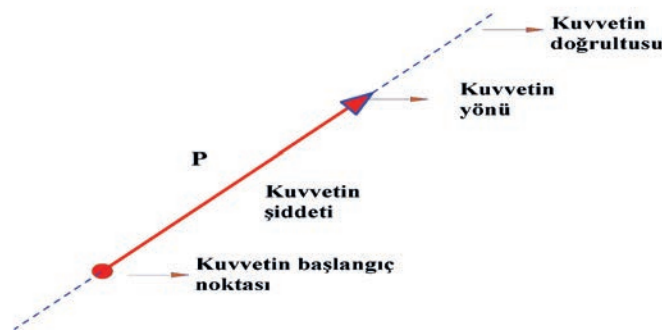
Duran bir cismi harekete geçiren, hareket hâlindeki bir cismi durduran, cismin yönünü ve doğrultusunu değiştiren veya cisimlerin biçimlerinde değişikliğe neden olan etkiye **kuvvet** denir. Kuvvet, başlangıç noktası (etki ya da uygulama noktası), şiddeti, doğrultusu ve yönü ile karakterize edilir. Bu özellikleri ile kuvvet vektörel bir büyüklüktür.

Kuvvetin yatay doğrultuda olması durumu kuvvet elemanları gösterimi Şekil 1.3’te gösterilmiştir.



Şekil 1.3: Yatay doğrultuda kuvvet ve elemanları gösterimi

Kuvvetin açısız doğrultuda olması durumu kuvvet elemanları gösterimi Şekil 1.4'te gösterilmiştir.



Şekil 1.4: Açısız doğrultuda kuvvet ve elemanları gösterimi

Kuvvet; doğrudan ve dolaylı kuvvetler, iç ve dış kuvvetler, yüzeye ya da hacme yayılı kuvvetler olarak sınıflandırılabilir.

**Cisim:** Fiziksel olayın etkilerinin ölçüldüğü geometrik bölgeye verilen addır. Statikte cisimler aşağıda verilen iki ana idealleştirmeye tanımlanır.

1. Maddesel nokta (parçacık)
2. Rijit cisim

**Maddesel Nokta (Parçacık):** İncelenen statik problemin karakteri nedeniyle boyutları ihmal edilebilecek mertebede küçük olan cisme verilen addır. Maddesel nokta olarak dikkate alınabilen cismin kütlesi bir noktada toplanmış olarak kabul edilir.

**Rijit Cisim:** Kuvvetler etkisinde boyutları değişmediği kabul edilen, başka deyişle herhangi iki noktası arasındaki uzaklık daima sabit kalan, çok sayıda maddesel noktanın bileşimi olan ideal bir cisimdir. Çeşitli etkiler altında katı cisimlerin boyutlarındaki değişme küçük olduğunda, boyut değişimiyle ilgilenilmeyen durumlarda yapılan bir kabuldür. Kuvvetlerin bileşkesi ve bileşenlerine ayrılması öncesinde statikğin temel ilkelerinin incelenmesi ve bilinmesi gereklidir. Bu temel bilgiler cisimlerin veya yapı elemanlarının kuvvetler etkisi altındaki davranışları açısından önemlidir.

### 1.1.1. Statikğin Temel İlkeleri

Statik, dört temel ilkeye dayanır. Bu ilkeler şunlardır:

1. Kuvvetlerin toplanmasında paralelkenar ilkesi
2. Denge ilkesi
3. Süperpozisyon ilkesi
4. Etki-tepki ilkesi

**Paralelkenar Kanunu:** Bir maddesel noktaya etkiyen iki kuvvetin yerine bir tek kuvvet koymak mümkündür. Bileşke adı verilen bu kuvvet, kenarları verilen kuvvetlere eşit bir paralelkenarın köşegeni çizilerek elde edilir. Bileşke kuvvet, göz önüne alınan iki kuvvetin vektörel toplamıdır.

**Denge İlkesi:** Bir rijit cisme etkiyen iki kuvvetin dengede olabilmesi için tesir çizgilerinin aynı, şiddetlerinin eşit ve yönlerinin zıt olması gerekir.

**Süperpozisyon İlkesi:** Bir rijit cisim, birtakım kuvvetlerin etkisi altında dengede ise aralarına dengede olan diğer birtakım kuvvetlerin eklenmesi veya aralarından çıkarılması ile cismin dengesi bozulmaz.



**Etki-Tepki İlkesi:** Birbirine değen iki cismin değme noktalarında etki ve tepki kuvvetleri aynı şiddette, aynı tesir çizgisi üzerinde ve zıt yöndedir.

Statik problemlerinde aşağıda verilen üç durumla karşılaşılabilir.

**Bileşke:** Kuvvetler sisteminde kuvvetlerin sayısını azaltmak hesaplarda önemli kolaylıklar sağlar. Eğer kuvvetler sistemi bir tek kuvvete indirgenebilirse bu kuvvet aranan bileşke olur.

**Bileşenlere Ayırma:** Bazı durumlarda bir kuvvetin kendisi yerine belirli doğrultulardaki bileşenlerinin kullanılması daha elverişli olabilir. Bu durumda bileşenlere ayırma problemi ile karşılaşılabilir.

**Denge:** Kuvvetler sisteminin dengede olması için sağlaması gereken koşulların incelenmesidir.

## 1.1.2. Bileşke Kuvvetler ve Hesaplama Yöntemleri

Kuvvetlerin durumlarına göre farklı yöntemlerle bileşke kuvvetler belirlenir. Kuvvetler aşağıda verilen üç durumda bulunabilir.

- Bir noktada kesişen kuvvetler
- Paralel kuvvetler
- Genel kuvvetler

İki veya daha fazla kuvvetin yaptığı etkiyi tek başına yapan kuvvete **bileşke kuvvet** denir. Bileşke kuvvet genellikle R (Reaksiyon: Tepki) harfi ile gösterilir. Reaksiyon bir noktaya, düzleme, cisme veya yapı elemanına uygulanan kuvvetlerin toplamını yani bileşkesini ifade eder.

## 1.1.3. Bileşke Kuvvet Hesapları

Bileşke kuvvetlerin hesaplamalarında; kuvvetlerin yönleri, kesişme durumları ve kuvvetlerin birbirine paralel konumda olma durumlarına göre farklı yöntemler kullanılır.

### 1.1.3.1. Doğrultuları Aynı Olan Kuvvetlerin Bileşkesi

$\alpha = 0^\circ$  ise (Kuvvetler arasında herhangi bir açı olmama durumu)



şekil 1.5: Doğrultuları aynı, yönleri farklı kuvvetler

Soldan sağa doğru olan kuvvetler toplamına  $R_1 = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n$  ve sağdan sola doğru olan kuvvetler toplamına ise  $R_2 = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$  bulunur (şekil 1.5).

Buradan da  $R = R_1 - R_2$  bağıntısıyla bileşke kuvvet bulunur. Bileşke kuvvetin yönü ise matematiksel işlemin sonucuna göre (+) çıkması durumunda soldan sağa, (-) çıkması durumunda ise sağdan sola olacaktır.

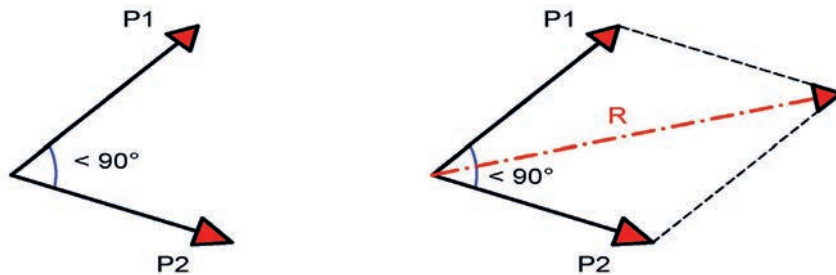
### 1.1.3.2. Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin Cosinüs Teoremi İle Hesaplanması

Kesişen iki kuvvet dar açı, dik açı ve geniş açıyla kesişir. Kesişen iki kuvvetin bileşkesinin bulunması için ise Cosinüs Teoremi, Kuvvetler Paralel Kenarı Yöntemi, Kuvvetler Üçgeni ve İzdüşüm Yöntemi kullanılır.

### Dar Açıda Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesini Cosinüs Teoremi ile Hesaplama

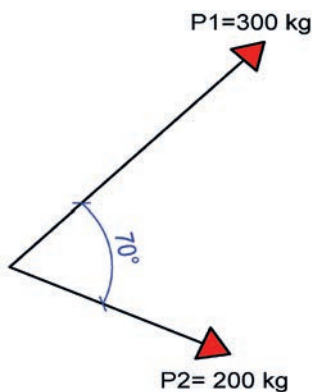
Kuvvetler aynı doğrultuda değilse ve dar açıda kesişiyorsa açının  $90^\circ$ 'den küçük olması ve  $\text{Cos } 90^\circ$ 'den küçük açılarının pozitif (+) değerli olması hâlidir. Bu durumda dar açıda kesişen iki kuvvetin bileşkesi aşağıda verilen bağıntıyla hesaplanır (Şekil 1.6).

$\alpha$  (Alfa)  $< 90^\circ$  olduğundan  $R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \cdot \text{Cos}\alpha$  bağıntısıyla hesaplanır.



Şekil 1.6: Dar açıda kesişen iki kuvvet ve bileşkesi ( $\alpha < 90^\circ$ )

**Problem:** Aşağıda verilen  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin (Şekil 1.7) bileşkesini (R) Cosinüs Teoremi ile hesaplayınız. ( $\text{Cos } 70^\circ = 0,342$ )



#### Çözüm:

$\alpha < 90^\circ$  olduğundan  $R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \cdot \text{Cos}\alpha$  bağıntısından

$$R^2 = 300^2 + 200^2 + 2.300.200 \cdot \text{Cos } 70^\circ$$

$$R^2 = 90000 + 40000 + 120000 \times 0,342 \text{ buradan da } R^2 = 130000 + 4104$$

$$R^2 = 134104 \text{ olur. Eşitlikte iki tarafın karekökü alınır.}$$

**R= 366,202 kg bulunur.**

Şekil 1.7: Kesişen iki kuvvetin bileşkesi ( $\alpha < 90^\circ$ )

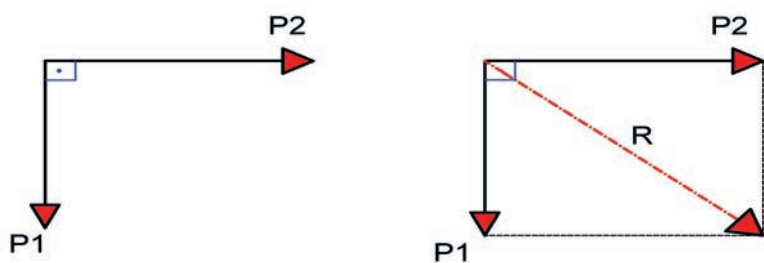
### Dik Açıyla Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesini Cosinüs Teoremi ile Hesaplama

Dar açıyla kesişen kuvvetlerin bileşke hesabı aynı bağıntıyla hesaplanır. Buradaki tek fark, aralarındaki açının  $90^\circ$  olmasıdır,

$\text{Cos } 90^\circ$ 'nin değerinin sıfıra (0) eşit ve sıfırın da çarpımda yutan eleman olmasından dolayı Cosinüs Teoremi yer alan yanındaki değerleri yutar (Şekil 1.8). Bu durumda dik açıda kesişen iki kuvvetin bileşkesi:

$\alpha = 90^\circ$  olduğundan

$R^2 = P_1^2 + P_2^2$  bağıntısıyla hesaplanır.

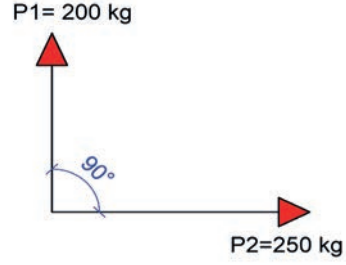


Şekil 1.8: Dik açıda kesişen iki kuvvet ve bileşkesi ( $\alpha = 90^\circ$ )



**Problem:** Yanda verilen  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin (Şekil 1.9) bileşkesini (R) Cosinüs Teoremi ile hesaplayınız ( $\cos 90^\circ = 0$ ).

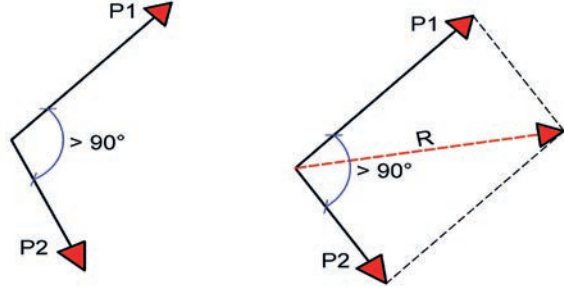
**Çözüm:**  $\alpha = 90^\circ$  ve  $\cos 90^\circ = 0$  olduğundan  $R^2 = P_1^2 + P_2^2$  bağıntısından  $R^2 = 200^2 + 250^2$  buradan  $R^2 = 40000 + 62500$  toplamından  $R^2 = 102500$  bulunur. Eşitlikte iki tarafın karekökü alınır. **R= 320,16 kg** bulunur.



Şekil 1.9: Dik açıda kesişen iki kuvvet ve bileşkesi

### Geniş Açıda Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesini Cosinüs Teoremi ile Hesaplama

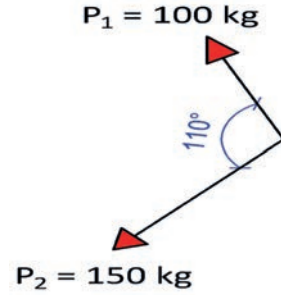
Dar ve dik açıyla kesişen kuvvetlerin bileşke hesabı ile aynı bağıntı kullanılarak hesaplanır. Buradaki fark, aralarındaki açının da  $90^\circ$ 'den büyük ve  $\cos 90^\circ$ 'den büyük açının negatif (-) değerli olması hâlidir (Şekil 1.10). Bu durumda geniş açıda kesişen iki kuvvetin bileşkesi:  $\alpha > 90^\circ$  olduğundan  $R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha$  bağıntısıyla hesaplanır.



Şekil 1.10: Geniş açıda kesişen iki kuvvet ve bileşkesi

**Problem:** Aşağıda verilen  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin (Şekil 1.11) bileşkesini (R) Cosinüs Teoremi ile hesaplayınız ( $\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ = 0,342$ ).

**Çözüm:**  $\alpha > 90^\circ$  olduğundan  $R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha$  bağıntısından  $R^2 = 100^2 + 150^2 - 2 \cdot 100 \cdot 150 \cdot \cos 110^\circ$   $R^2 = 10000 + 22500 - 30000 \times 0,342$  buradan da  $R^2 = 32500 - 10260$   $R^2 = 22240$  olur. Eşitlikte iki tarafın karekökü alınır. **R= 149,13 kg** bulunur.

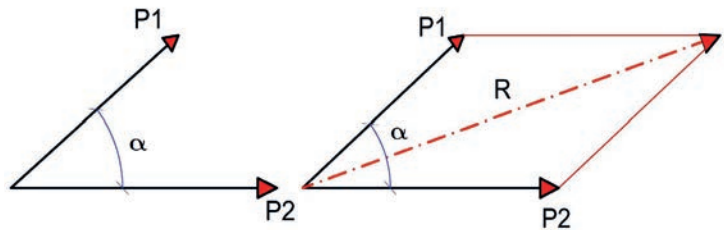


Şekil 1.11: Geniş açıda kesişen iki kuvvet ve bileşkesi ( $\alpha > 90^\circ$ )

### 1.1.3.3. Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin Kuvvetler Paralelkenarı ve Kuvvetler Üçgeni Yöntemiyle Bulunması

#### Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin Kuvvetler Paralelkenarı Yöntemiyle Bulunması

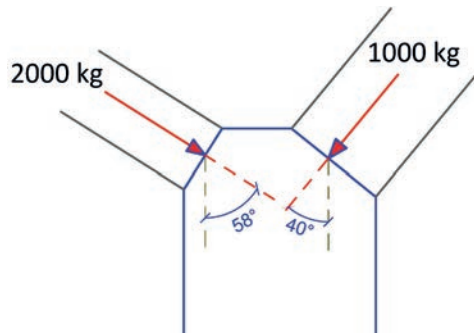
Kesişen iki kuvvetin arasındaki açıya ve kuvvet ölçeğine (Örneğin; 50 kg = 1 cm veya 1 ton = 1 cm gibi) uygun şekilde kuvvetler çizilir. Çizilen kuvvetlerin birbirlerinin bitiş noktalarına paralel olacak şekilde kuvvetler taşınarak paralelkenar oluşturulur. Oluşturulan paralelkenarın başlangıç noktası ile diğer noktası yani bitiş noktası arasında bileşke kuvvet çizilir. Bileşke kuvvetin uzunluğu ölçülür. Ölçülen uzunluğun kuvvet ölçeği ile çarpımı sonucu bileşke kuvvetin şiddeti bulunur (Şekil 1.12).



Şekil 1.12: Kesişen iki kuvvetin kuvvetler paralel kenarı yöntemi ile bileşkesi

Şekil 1.12'de oluşturulan kuvvetler paralelkenarının başlangıç ve bitiş noktasını oluşturan köşegen uzunluğu cetvelle ölçülür. **R= Kuvvet Ölçeği x Ölçülen Uzunluk** ile bileşke kuvvetin değeri bulunur.

**Problem:** Şekil 1.13'te verilen bir kemere ait üzengi ayağına gelen kuvvetler gösterilmiştir. Bu kemerin üzengi ayağına etki eden bileşke kuvvetini bulunuz. (Kuvvet ölçeği: 1000 kg = 1 cm)



Şekil 1.13: Kemer üzengi ayağına etki eden kesişen iki kuvvet

**Çözüm:** Şekil 1.14'te olduğu gibi kemerin üzengi ayağına gelen iki kuvvetin bileşkesi, kuvvetler paralel kenarı yöntemiyle aralarındaki açılar, açıölçer ile belirlenerek verilen kuvvet ölçeği ile aşağıdaki gibi çizilir.

Şekil 1.14'te R'nin uzunluğu cetvelle yaklaşık 2,1 cm olarak ölçülür. Buradan da

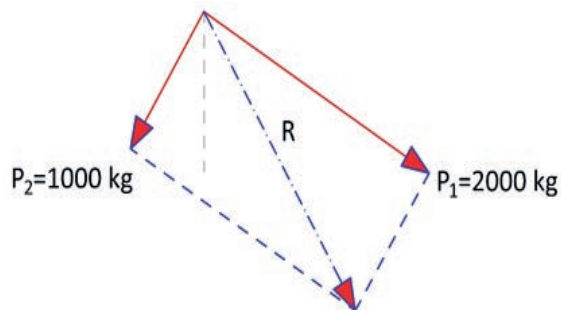
$R \cong 2,075 \times 1000 \cong 2075 \text{ kg}$  bulunur.

Cosinüs Teoremi kullanarak kontrolünü yaparsak;  $\alpha > 90^\circ$  olduğundan  $R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha$  bağıntısı ile  $R^2 = 1000^2 + 2000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 2000 \cdot \cos 98^\circ$

$R^2 = 1000000 + 4000000 - 4000000 \times 0,1736$  buradan da

$R^2 = 5000000 - 694400$  ise  $R^2 = 4305600$  olur. Eşitlikte iki tarafın karekökü alınır.

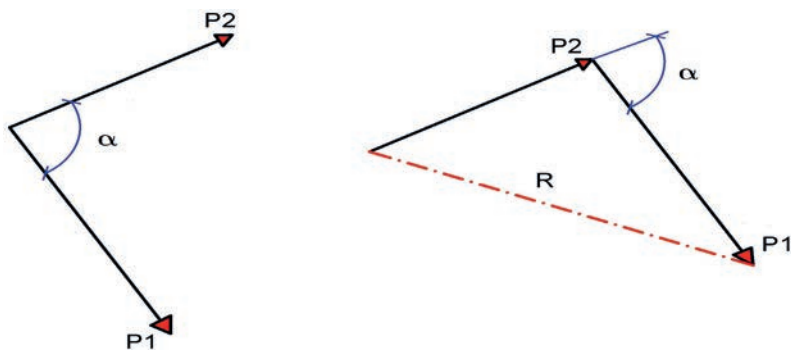
$R \cong 2075 \text{ kg}$  bulunur.



Şekil 1.14: Kemer üzengi ayağına etki eden kesişen iki kuvvetin bileşkesi

### Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin Kuvvetler Üçgeni Metodu ile Bulunması

Bileşke kuvvetin kuvvetler üçgeni yöntemiyle bulunmasında ilk önce kuvvetlerden biri verilen kuvvet ölçeğinde (Örneğin; 100 kg = 1 cm veya 5 ton = 1 cm gibi) çizilir. Diğer kuvvet açısına ve kuvvet ölçeğine uygun olarak diğer kuvvetin ucuna eklenerek çizilir. Birinci kuvvetin başlangıç noktası ile ikinci kuvvetin bitiş noktası birleştirilerek kuvvetler üçgeni oluşturulur (Şekil 1.15). Kuvvetler üçgenini oluşturan bileşke kuvvet (R) gönye ile ölçülür. Ölçülen uzunluk kuvvet ölçeği ile çarpımı sonucu bileşke kuvvetin şiddeti bulunur.

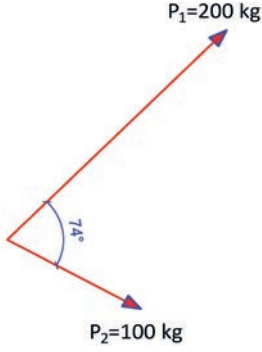


Şekil 1.15: Kesişen iki kuvvetin kuvvetler üçgeni yöntemi ile bileşkesi

Şekil 1.15'te oluşturulan kuvvetler üçgeninin başlangıç ve bitiş noktasını oluşturan uzunluk cetvel ile ölçülür.  $R = \text{Kuvvet Ölçeği} \times \text{Ölçülen Uzunluk}$  ile bileşke kuvvetin değeri bulunur.

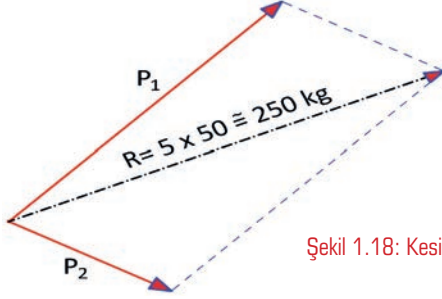


**Problem:** Şekil 1.16'da verilen  $P_1$  ve  $P_2$  kuvveti arasındaki açı  $74^\circ$  olduğuna göre bileşke kuvvetini, kuvvetler üçgeni yöntemi ve kuvvetler paralelkenarı yöntemi ile bulunuz. (Kuvvet ölçeği:  $50 \text{ kg} = 1 \text{ cm}$ )



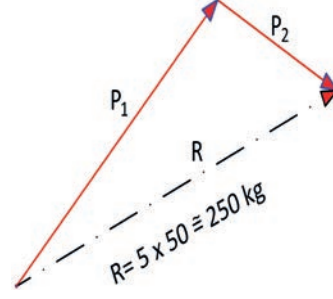
Şekil 1.16: İki kuvvetin kesişimi

Bileşke; kuvvetler paralelkenarı yöntemiyle kuvvetlerin arasındaki açı, açıölçer ile belirlenir ve verilen kuvvet ölçeği ile Şekil 1.18'de olduğu gibi çizilerek bulunur.



Şekil 1.18: Kesişen iki kuvvetin kuvvetler paralelkenarı ile bileşkesi

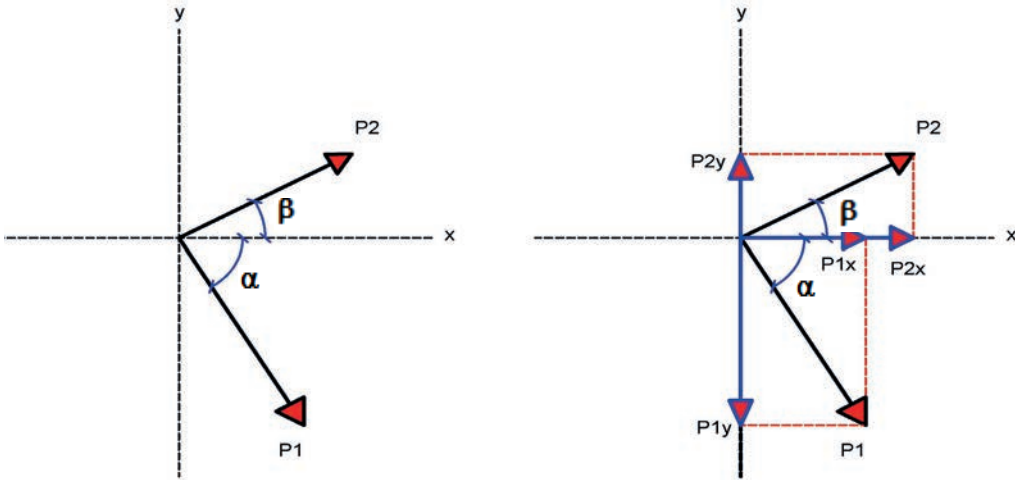
**Çözüm:** Bileşke; kuvvetler üçgeni yöntemiyle kuvvetlerin arasındaki açı, açıölçer ile belirlenir ve verilen kuvvet ölçeği ile Şekil 1.17'de olduğu gibi çizilerek bulunur.



Şekil 1.17: Kesişen iki kuvvetin kuvvetler üçgeni ile bileşkesi

### 1.1.3.4. Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin İzdüşüm Yöntemiyle Bulunması

İzdüşüm yönteminde koordinat düzlemleri üzerine izdüşümleri (x ve y eksenleri izdüşümleri) alınır. İzdüşüm bileşenlerinin toplamları alınarak tek kuvvete dönüştürülür.



Şekil 1.19: Kesişen iki kuvvetin x ve y eksenlerindeki izdüşümleri

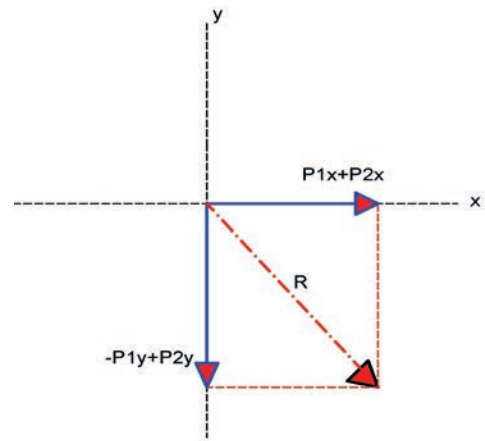
Şekil 1.19'da kuvvetler ile eksenler arasındaki  $\alpha$  (Alfa) ve  $\beta$  (Beta) açıları yatay eksene göre açı değerleri verilmiştir. Verilen duruma göre

$$P_1x = P_1 \cdot \cos\alpha \text{ ve } P_1y = P_1 \cdot \sin\alpha \text{ olur.}$$

$$P_2x = P_2 \cdot \cos\beta \text{ ve } P_2y = P_2 \cdot \sin\beta \text{ olur.}$$

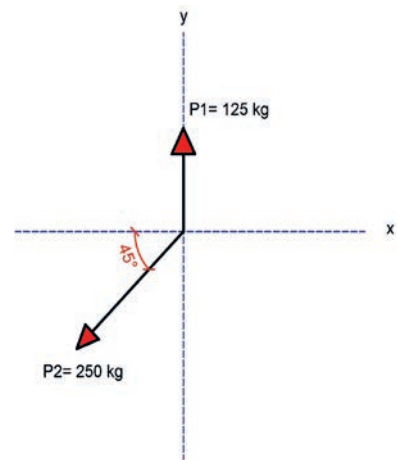
x ekseninde izdüşümleri alınan kuvvetlerin ikisi de ( $P_1x$  ve  $P_2x$ ) aynı yönde soldan sağa doğru olan kuvvetleri (+) kabul edilirse  $\sum P_x = P_1x + P_2x$  bağıntısıyla hesaplanır. x ekseninde izdüşümleri alınan kuvvetlerden  $P_1y$  aşağı yönlü ve  $P_2y$  ise yukarı yönlü olduğu görülmektedir. Aşağı yönlü  $P_1y$  kuvveti (-) ve yukarı yönlü  $P_2y$  kuvveti (+) kabul edilirse  $\sum P_y = -P_1y + P_2y$  bağıntısıyla hesaplanır (Şekil 1.20).

Böylelikle birbirleri ile  $90^\circ$ lik açı yapan x eksenindeki kuvvetlerin bileşkesi  $\sum P_x$  ve y eksenindeki kuvvetlerin bileşkesi  $\sum P_y$  bulunur. Şekil 1.20'de x eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamları olan  $\sum P_x$  ve y eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamları olan  $\sum P_y$  arasındaki açı  $90^\circ$  olduğundan; Cosinüs Teoremine göre  $R^2 = P_1^2 + P_2^2$  bağıntısından hareketle  $R^2 = (\sum P_x)^2 + (\sum P_y)^2$  bağıntısıyla bulunur.



Şekil 1.20: Kesikgen iki kuvvetin bileşkesinin x ve y ekseninde izdüşüm yöntemi ile gösterimi

**Problem:** Şekil 1.21'de verilen  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin bileşkesini "İzdüşüm Yöntemi" ile hesaplayınız. (Cos  $45^\circ = 0,707$  ve Sin  $45^\circ = 0,707$ )



Şekil 1.21: Kesikgen iki kuvvet

**Çözüm:** Öncelikle  $P_2$  kuvvetinin x (yatay) ve y (düşey) eksenine olan izdüşümleri alınır (Şekil 1.22).

Şekil 1.22'de;

$$P_1 = P_1y = 125 \text{ kg (yukarı yönde)}$$

$$P_2x = P_2x \cdot \cos 45^\circ = 250 \times 0,707 = 176,75 \text{ kg (sağdan sola yönde)}$$

$$P_2y = P_2y \cdot \sin 45^\circ = 250 \times 0,707 = 176,75 \text{ kg (yukarıdan aşağıya yönde)}$$

$$\sum P_x = P_2x = 176,75 \text{ kg (sağdan sola "+" kabulü)}$$

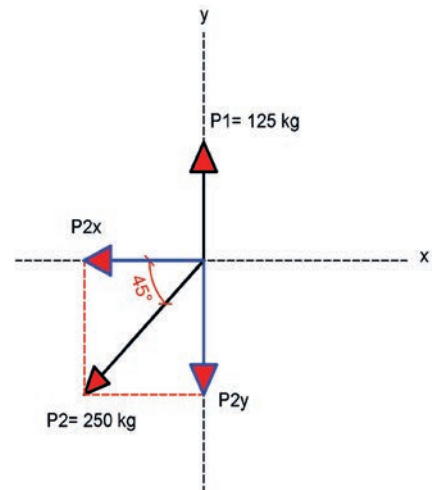
$$\sum P_y = P_1y - P_2y = 125 - 176,75 = -51,75 \text{ kg (aşağıdan yukarı "+" yukarıdan aşağı "-" kabulü)}$$

$$R^2 = (\sum P_x)^2 + (\sum P_y)^2 = (176,75)^2 + (-51,75)^2 \text{ buradan}$$

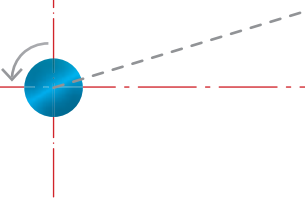
$$R^2 = 31240,5625 + 2678,0625$$

$$R^2 = 33918,625 \text{ olur. Eşitlikte iki tarafın karekökü alınır.}$$

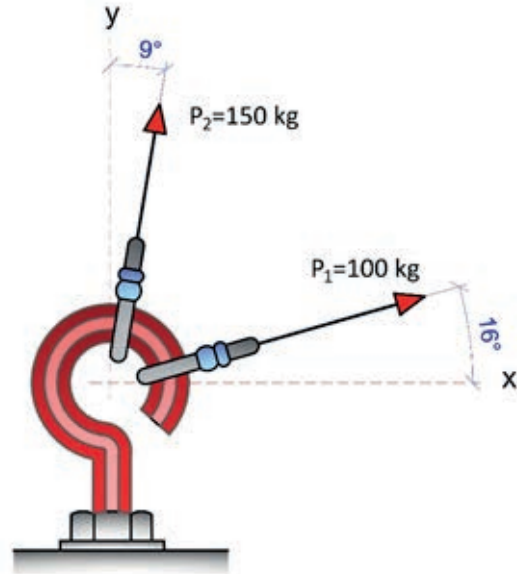
$$R = 184,17 \text{ kg bulunur.}$$



Şekil 1.22: Kesikgen iki kuvvetin x ve y ekseninde izdüşümleri



**Problem:** Şekil 1.23'te verilen kancaya iki halat bağlanmıştır.  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetleri ile gösterilen kuvvetlerin bileşkesini "İzdüşüm Yöntemi" ile hesaplayınız.  
( $\cos 9^\circ = 0,987$  ve  $\sin 9^\circ = 0,156$ ;  
 $\cos 16^\circ = 0,961$  ve  $\sin 16^\circ = 0,276$ )



Şekil 1.23: Kesişen iki kuvvet

**Çözüm:** Şekil 1.23'te verilen kuvvetlerin x ve y eksenlerine izdüşümleri alınır.

Şekil 1.24'te;

$P_{1x} = P_1 \cdot \cos 9^\circ = 100 \times 0,156 = 15,60$  kg (soldan sağa)  
 $P_{1y} = P_1 \cdot \sin 9^\circ = 100 \times 0,987 = 98,70$  kg (aşağıdan yukarı)

$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 16^\circ = 150 \times 0,961 = 144,15$  kg (soldan sağa)  
 $P_{2y} = P_2 \cdot \sin 16^\circ = 150 \times 0,276 = 41,40$  kg (aşağıdan yukarı)

$\Sigma P_x = P_{1x} + P_{2x} = 15,60 + 144,15 = 159,75$  kg (sağdan sola "+" kabulü)

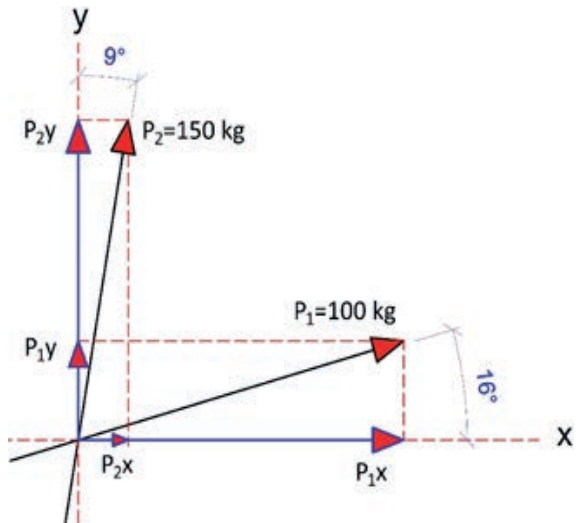
$\Sigma P_y = P_{1y} + P_{2y} = 98,70 + 41,40 = 140,10$  kg (aşağıdan yukarı "+" yukarıdan aşağı "-" kabulü)

$R^2 = (\Sigma P_x)^2 + (\Sigma P_y)^2 = (159,75)^2 + (140,10)^2$  buradan

$R^2 = 25520,63 + 19628,01$

$R^2 = 45148,64$  olur. Eşitlikte iki tarafın karekökü alınır.

**R = 212,48 kg** bulunur.



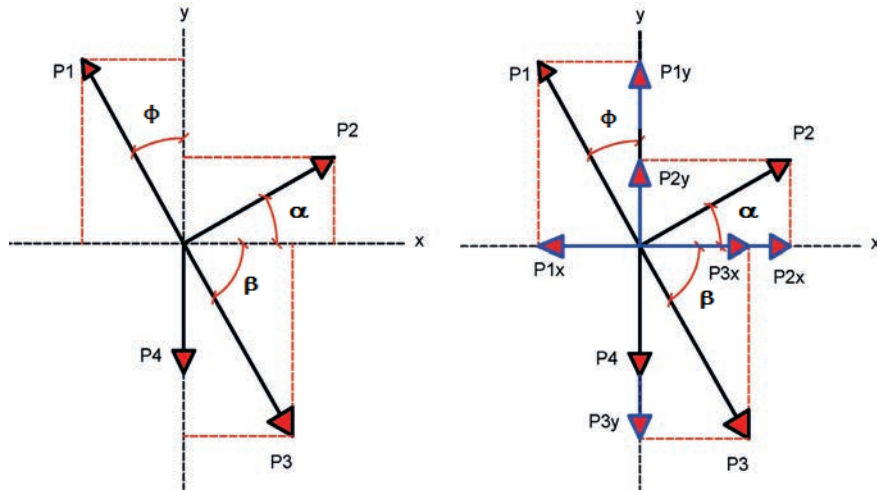
Şekil 1.24: Kesişen iki kuvvetin x ve y ekseninde izdüşümleri

### 1.1.3.5. Kesişen İki Kuvvetin Bileşkesinin Bulunması

Kesişen ikiden çok kuvvetin bileşkesinin bulunmasında genellikle; İzdüşüm Yöntemi, Kuvvetler Çokgeni Yöntemi, Kuvvetler Üçgeni (İndirgeme-Yoketme Yöntemi) gibi yöntemler kullanılır.

Kesişen ikiden çok kuvvetin konumları ve kuvvetlerin arasındaki açıları doğrultusunda bu yöntemlerden çözüme uygun olan seçilerek ikiden çok kuvvetin bileşkesi bulunur.

## Kesişen İki Kuvvetin Çok Kuvvetin Bileşkesini İzdüşüm Yöntemiyle Bulma



Şekil 1.25: Kesişen ikiden çok kuvvetin x ve y eksenlerinde izdüşümleri

Şekil 1.25'te  $P_2$  kuvveti ile eksen arasındaki açı  $\alpha$  (Alfa),  $P_3$  kuvvetleri ile yatay eksen arasındaki açı  $\beta$  (Beta),  $P_1$  kuvveti ile dikey eksen arasındaki açı  $\phi$  (Fi) olarak verildiği görülmektedir.  $P_4$  kuvveti ise dikey eksen üzerinde dik konumdadır.

Şekil 1.25'te verilen kuvvetlerin durumuna göre

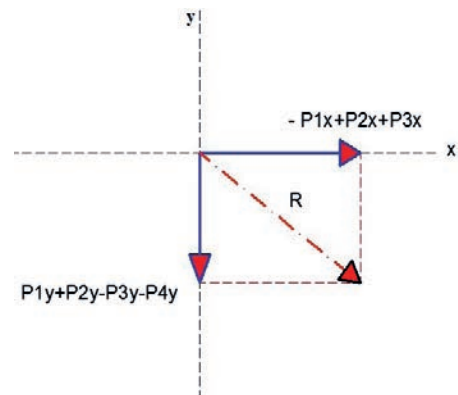
$P_1$  kuvveti ile **düşey eksen** arasındaki açı verildiğinden  $P_{1x} = P_1 \cdot \sin\phi$  ve  $P_{1y} = P_1 \cdot \cos\phi$  olur.  
 $P_2$  kuvveti ile **yatay eksen** arasındaki açı verildiğinden  $P_{2x} = P_2 \cdot \cos\alpha$  ve  $P_{2y} = P_2 \cdot \sin\alpha$  olur.  
 $P_3$  kuvveti ile **yatay eksen** arasındaki açı verildiğinden  $P_{3x} = P_3 \cdot \cos\beta$  ve  $P_{3y} = P_3 \cdot \sin\beta$  olur.  
 $P_4$  kuvveti ise düşey (y) eksen üzerindedir. Dolayısıyla  $P_4 = P_4y$  olur.

x yatay eksen üzerinde kuvvetlerin izdüşümleri:  $P_{1x}$ ,  $P_{2x}$  ve  $P_{3x}$   
y yatay eksen üzerinde kuvvetlerin izdüşümleri:  $P_{1y}$ ,  $P_{2y}$ ,  $P_{3y}$  ve  $P_{4y}$

$P_{1x}$  kuvveti sağdan sola olduğundan (-),  $P_{2x}$  ve  $P_{3x}$  kuvvetleri soldan sağa (+) kabul edilirse:  
 $\sum P_x = -P_{1x} + P_{2x} + P_{3x}$  bağıntısıyla hesaplanır.

$P_{1y}$  ve  $P_{2y}$  kuvvetleri yukarı yönde olduğundan (+),  $P_{3y}$  ve  $P_{4y}$  kuvvetleri aşağı yönde (-) kabul edilirse:  
 $\sum P_y = P_{1y} + P_{2y} - P_{3y} - P_{4y}$  bağıntısıyla hesaplanır.

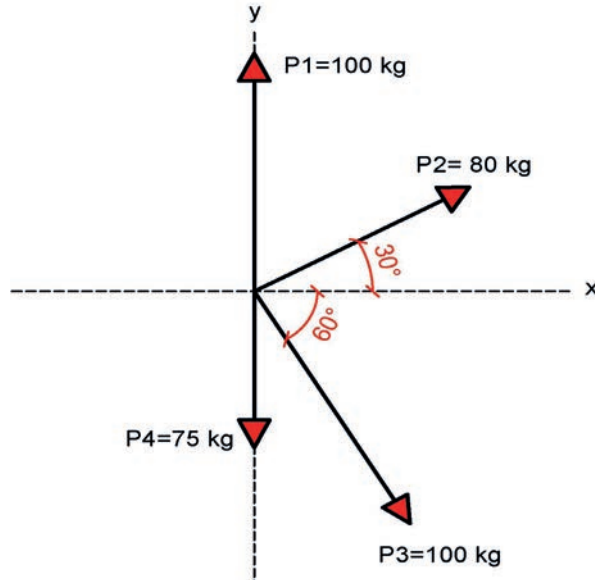
Şekil 1.26'da x eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamları olan  $\sum P_x$  ve y eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamları olan  $\sum P_y$  arasındaki açı  $90^\circ$  olduğundan, Cosinüs Teoremine göre  $R^2 = P_x^2 + P_y^2$  bağıntısından hareketle  $R^2 = (\sum P_x)^2 + (\sum P_y)^2$  bağıntısıyla bulunur.



Şekil 1.26: Kesişen ikiden çok kuvvetin bileşkesinin x ve y ekseninde izdüşüm yöntemi ile gösterimi



**Problem:** Şekil 1.27’de verilen  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  ve  $P_4$  kuvvetlerinin bileşkesini İzdüşüm Yöntemi ile hesaplayınız. (Cos  $30^\circ = 0,866$  ve Sin  $30^\circ = 0,5$ ; Cos  $60^\circ = 0,5$  ve Sin  $60^\circ = 0,866$ )



Şekil 1.27: Kesişen dört kuvvetin x ve y eksenlerine göre konumları

**Çözüm:** Şekil 1.28’de verilen duruma göre

$P_2$  kuvveti ile **yatay eksen** arasındaki açı verildiğinden  $P_{2x} = P_2 \cdot \text{Cos } 30^\circ$  ve  $P_{2y} = P_2 \cdot \text{Sin } 30^\circ$  olur.  $P_3$  kuvveti ile **yatay eksen** arasındaki açı verildiğinden  $P_{3x} = P_3 \cdot \text{Cos } 60^\circ$  ve  $P_{3y} = P_3 \cdot \text{Sin } 60^\circ$  olur.  $P_1$  ve  $P_4$  kuvvetleri ise düşey (y) eksenindedir. Dolayısıyla  $P_1 = P_1y$  ve  $P_4 = P_4y$  olarak alınır.

Şekil 1.28’de;

x yatay ekseninde kuvvetlerin izdüşümleri

$$P_{2x} = P_2 \cdot \text{Cos } 30^\circ = 80 \times 0,866 = 69,28 \text{ kg}$$

$$P_{3x} = P_3 \cdot \text{Cos } 60^\circ = 100 \times 0,5 = 50 \text{ kg}$$

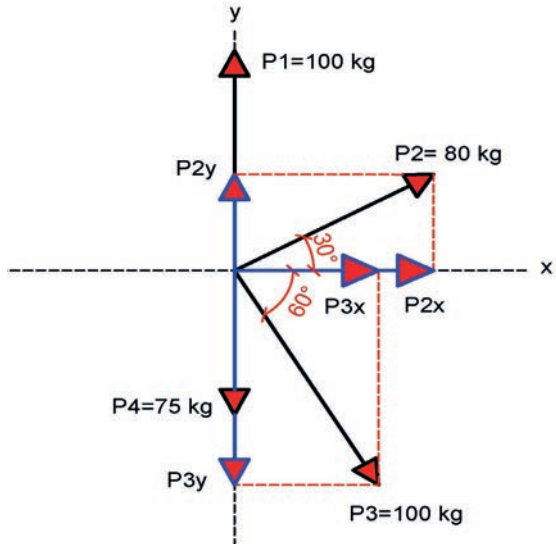
y yatay ekseninde kuvvetlerin izdüşümleri

$$P_{1y} (P_1) = 100 \text{ kg}$$

$$P_{2y} = P_2 \cdot \text{Sin } 30^\circ = 80 \times 0,5 = 40 \text{ kg}$$

$$P_{3y} = P_3 \cdot \text{Sin } 60^\circ = 100 \times 0,866 = 86,6 \text{ kg}$$

$$P_{4y} (P_4) = 75 \text{ kg}$$



Şekil 1.28: Kesişen dört kuvvetin x ve y eksenlerinde izdüşüm görünümleri

$P_2x$  ve  $P_3x$  kuvvetleri aynı yönde soldan sağa olduğundan (+) kabul edilirse bu örnekte sağdan sola herhangi bir yatay kuvvet bulunmamaktadır.

$\Sigma Px = P_2x + P_3x = 69,28 + 50 = 119,28 \text{ kg}$  (x yatay eksen kuvvetleri bileşkesinin yönü sağdan sola doğrultuda) bulunur.

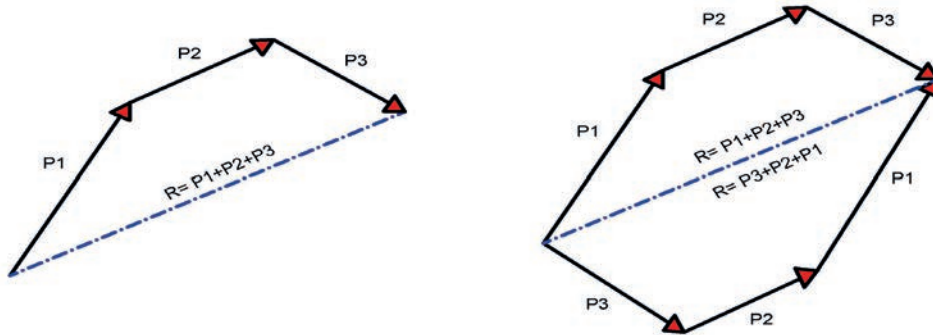
$P_1y$  ve  $P_2y$  kuvvetleri yukarı yönde olduğundan (+),  $P_3y$  ve  $P_4y$  kuvvetleri aşağı yönde (-) kabul edilirse:

$\Sigma Py = P_1y + P_2y - P_3y - P_4y = 100 + 40 - 86,6 - 75 = -21,6 \text{ kg}$  (y düşey eksen kuvvetleri bileşkesinin yönü aşağı doğrultuda) bulunur.

Şekil 1.29'da x eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamları olan  $\Sigma Px$  ve y eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamları olan  $\Sigma Py$  arasındaki açı  $90^\circ$  olduğundan Cosinüs Teoremine göre  $R^2 = (\Sigma Px)^2 + (\Sigma Py)^2 = (119,28)^2 + (-21,6)^2 = 14227,72 + 466,56$  buradan da  $R^2 = 14694,28$  olur. Eşitlikte her iki tarafın karekökü alınırsa;  $R = 121,22 \text{ kg}$  bulunur.

### Kesişen İki Kuvvetin Çok Kuvvetin Bileşkesini Kuvvetler Çokgeni (Poligon) Yöntemiyle Bulma

İki kuvvetin bileşkesi Çokgen (Poligon) yöntemiyle bulunurken kuvvetlerin büyüklüğü için bir kuvvet ölçeği seçilir (Örneğin;  $50 \text{ kg} = 1 \text{ cm}$  veya  $1 \text{ ton} = 1 \text{ cm}$  gibi). Kuvvet ölçeğine göre kuvvetler arasındaki açılar açıölçer ile belirlenerek uç uca eklenir. Başlangıç noktası ile son eklenen kuvvetin bitiş noktası birleştirilerek bileşke kuvvet çizilir. Bileşke kuvvet uzunluğu ölçülerek kuvvet ölçeği ile çarpımı sonucu bileşke kuvvetin şiddeti bulunur (Şekil 1.30).

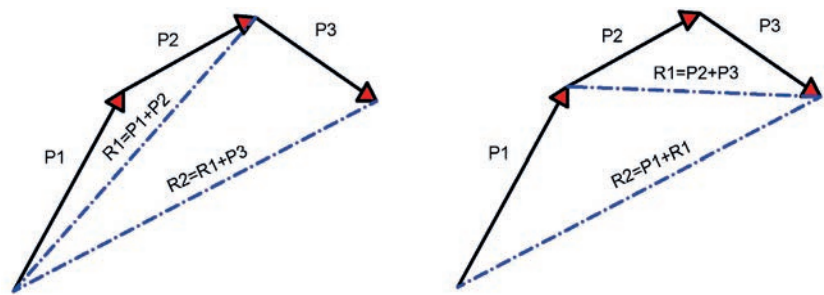


Şekil 1.30: Kesişen iki kuvvetin çok kuvvetin kuvvetler çokgeni yöntemi ile bileşkesinin bulunması gösterimi

### Kesişen İki Kuvvetin Bileşke Kuvvetini Kuvvetler Üçgeni (İndirgeme-Yok etme) Yöntemiyle Bulma

İki kuvvetin bileşkesi Üçgen (İndirgeme-Yok etme) yöntemiyle bulunurken kuvvetlerin büyüklüğü için bir kuvvet ölçeği seçilir.

Kuvvet ölçeğine göre birinci kuvvet ile ikinci kuvvet uç uca aralarındaki açı, açıölçer yardımıyla açı belirlendikten sonra eklenir ve başlangıç noktası ile bitiş noktası birleştirilerek iki kuvvetin birinci bileşke kuvveti bulunur. Bulunan birinci bileşkenin ucuna üçüncü kuvvet eklenir,

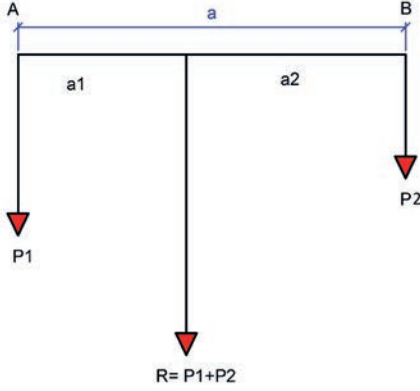


Şekil 1.31: Kesişen iki kuvvetin kuvvetler üçgeni yöntemi ile bileşkesinin bulunması gösterimi

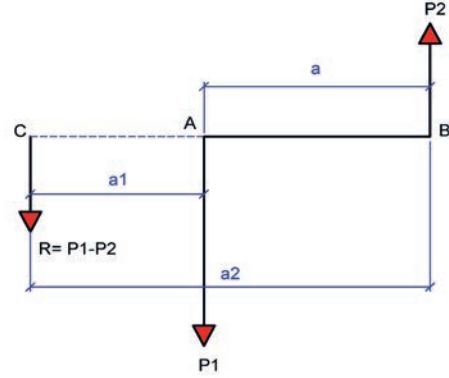
Bu işlemler son kuvvet ekleninceye kadar devam ettirilir. Son bulunan bileşke kuvvet ile son kuvvet uç uca eklendikten sonra bu bileşkenin başlangıç noktası ile son kuvvetin bitiş noktası birleştirilerek gerçek bileşke kuvvet çizilir. Bileşke kuvvet uzunluğu ölçülerek kuvvet ölçeği ile çarpımı sonucu bileşke kuvvetin şiddeti bulunur (Şekil 1.31).

### 1.1.3.6. Paralel Kuvvetlerin Bileşkesi

Bir cisim (veya sistem) üzerinde aynı noktaya etki etmeyen, doğrultuları birbirine paralel olan kuvvetlerin bileşkesi skaler (toplama veya çıkarma) işlemle hesaplanabilir. Bileşke kuvvetin yeri ise denge şartlarıyla bulunur. Aynı yönlü ve zıt yönlü paralel iki kuvvetin bileşke yeri analitik yöntemle aşağıdaki şekilde hesaplanır (Şekil 1.32, Şekil 1.33).



Şekil 1.32: Aynı yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesi



Şekil 1.33: Zıt yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesi

$P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$  bağıntısından  
 $a_1 = a \cdot P_2 / R$  ve  $a_2 = a \cdot P_1 / R$   
bağıntıları elde edilir.

$P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$  bağıntısından  
 $a_1 = a \cdot P_2 / R$  bağıntısı elde edilir.

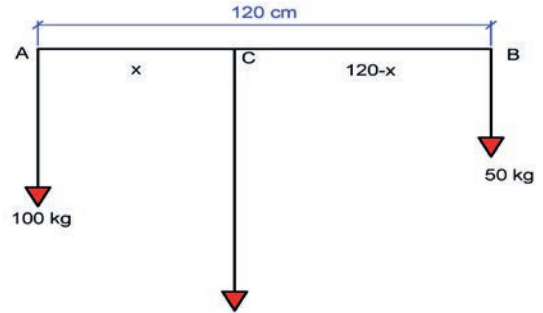
Aynı yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesi bu iki kuvvetin arasında büyük kuvvete yakın ve büyük kuvvet yönündedir (Şekil 1.32). Zıt yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesi bu kuvvetlerin dış tarafından büyük kuvvete yakın ve büyük kuvvet yönündedir (Şekil 1.33).

**Problem:** Şekil 1.34'te verilen 100 kg ve 50 kg'lık aynı yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesini ve bileşkenin yerini (uygulama noktasını) bulunuz.



Şekil 1.34: Aynı yönlü paralel iki kuvvet

**Çözüm:** Şekil 1.35'te bileşke kuvvet C uygulama noktasında olur.  $R = 100 + 50$  ise  $R = 150$  kg olur.



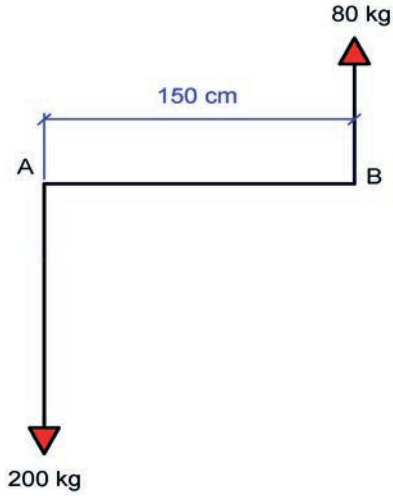
Şekil 1.35: Aynı yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesi ve yeri

$$x = \frac{120 \cdot 50}{150} \text{ ise } 150 \cdot x = 6000 \text{ olur.}$$

$$x = \frac{6000}{150} \text{ ise } AC = x = 40 \text{ cm}$$

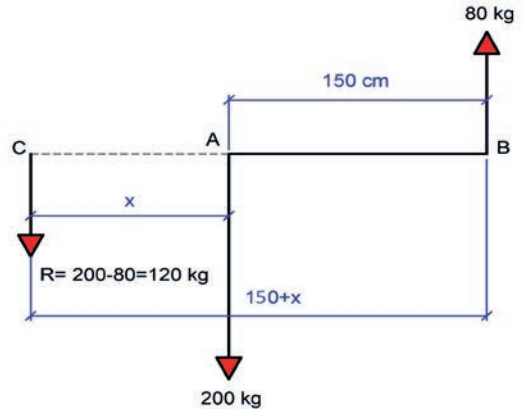
$CB = (120 - x)$  buradan da  $CB = 120 - 40$  ise  $CB = 80$  cm bulunur.

**Problem:** Şekil 1.36'da verilen 200 kg ve 80 kg'lık zıt yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesini ve bileşkenin yerini (uygulama noktasını) bulunuz.



Şekil 1.36: Zıt yönlü paralel iki kuvvet

**Çözüm:** Şekil 1.37'de görüldüğü gibi bileşke kuvvet C uygulama noktasında olur.  
 $R = 200 - 80$  ise  $R = 120$  kg olur.



Şekil 1.37: Zıt yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesi ve yeri

$$x = \frac{150 \cdot 80}{120} \quad AC = x = 100 \text{ cm bulunur.}$$

Buradan  $BC = 150 + 100 = 250$  cm olur.



### BİLGİ KUTUSU

İnsanların, olaylar karşısında tek başına seslerini duyurması çok zordur. Bir topluluk olarak hareket ettiklerinde ise mutlaka dikkate alınırlar ve fark edilirler. Çünkü insanlar, çoğunluğu göz ardı edemez ve yok sayamazlar.

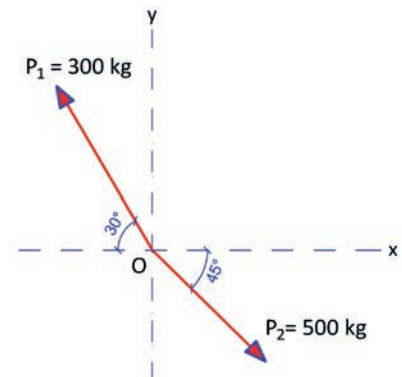
Kuvvetler de tek başına düşünüldüğünde etkisi azdır. Kuvvetler bir araya getirilip bileşke kuvvet olduğunda ise etkisi fazla olur. Bu durum "Birlikten kuvvet doğar." atasözü ile ifade edilebilir.



### SIRA SİZDE

Şekil 1.38'de verilen  $P_1$  ve  $P_2$  açısıl kuvvetlerinin bileşkesini;

- İzdüşüm yöntemi ile bulunuz?
- Kuvvetler üçgeni yöntemiyle bulunuz?



Şekil 1.38:  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetleri

## 1.2. UYGULAMA

# BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI

8 DERS SAATİ

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



36141

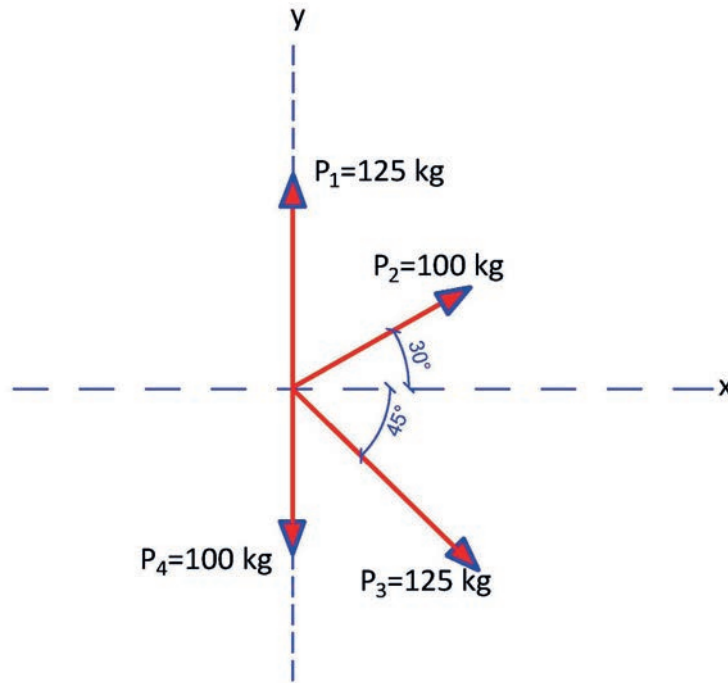
Bu çalışmanın amacı, kuvvetlerin bileşkesinin bulunması ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

**Bileşke kuvvet uygulamasını, işlem basamaklarına göre öğretmeninizin gözetiminde yerine getiriniz.**

Şekil 1.39'da verilen kuvvetlerin bileşkesini;

- İzdüşüm yöntemiyle bulunuz ( $\cos 30^\circ = 0,866$  ve  $\sin 30^\circ = 0,5$ ;  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0,707$ ).
- Kuvvetler çokgeni yöntemiyle bulunuz (Kuvvet ölçeği:  $50 \text{ kg} = 1 \text{ cm}$ ).



Şekil 1.39: İki kiden çok kuvvetin bileşkesi

### Yönerge

- Çalışmanızda kuvvetlerin düzlemler ile yaptıkları açılara ve kuvvet ölçeğine dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde net olarak görebilirsiniz.



## İşlem Basamakları

### İzdüşüm Yöntemi

- Şekil 1.39'da verilen kuvvetlerin yatay (x) ve düşey (y) eksenindeki izdüşümlerinin hesaplanması için bağıntılar yazılır.

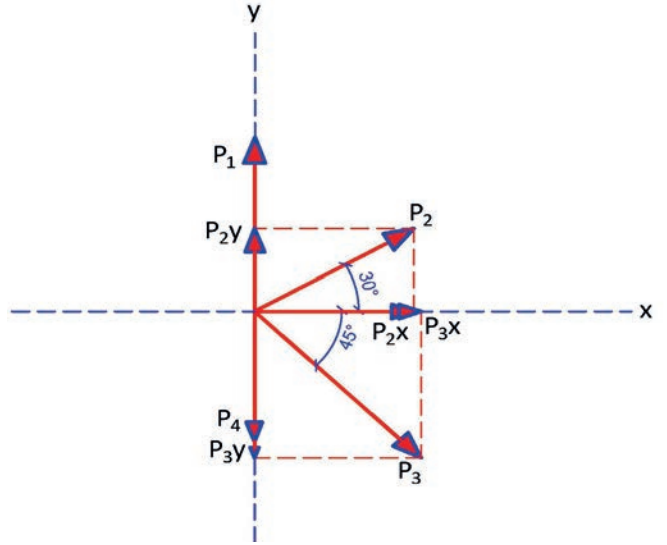
$P_2$  kuvveti ile **yatay eksen** arasındaki açı verildiğinden  $P_{2x} = P_2 \cdot \cos 30^\circ$  ve  $P_{2y} = P_2 \cdot \sin 30^\circ$  olur.

$P_3$  kuvveti ile **yatay eksen** arasındaki açı verildiğinden  $P_{3x} = P_3 \cdot \cos 45^\circ$  ve  $P_{3y} = P_3 \cdot \sin 45^\circ$  olur.

$P_1$  ve  $P_4$  kuvvetleri ise **düşey** eksenindedir. Dolayısıyla  $P_1 = P_{1y}$  ve  $P_4 = P_{4y}$  olarak alınır.

- Dik doğrultulu ve açısal doğrultulu kuvvetlerin x (yatay) ve y (düşey) eksenlerinde izdüşümleri çizilir (Şekil 1.40).

- Şekil 1.40'tan kuvvetlerin x ve y eksenleri üzerindeki izdüşümlerinin değerleri bulunur.

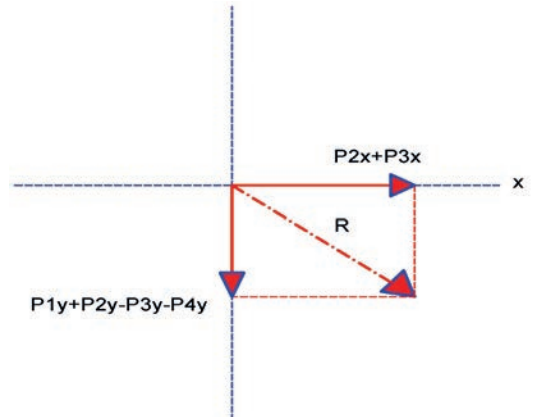


Şekil 1.40: İki kuvvetin x ve y eksenlerindeki izdüşümleri

x yatay ekseninde kuvvetlerin izdüşümleri:  $P_{2x} = P_2 \cdot \cos 30^\circ = 100 \times 0,866 = 86,6 \text{ kg}$   
 $P_{3x} = P_3 \cdot \cos 45^\circ = 125 \times 0,707 = 88,375 \text{ kg}$

y yatay ekseninde kuvvetlerin izdüşümleri:  $P_{1y} (P_1) = 125 \text{ kg}$   
 $P_{2y} = P_2 \cdot \sin 30^\circ = 100 \times 0,5 = 50 \text{ kg}$   
 $P_{3y} = P_3 \cdot \sin 45^\circ = 125 \times 0,707 = 88,375 \text{ kg}$   
 $P_{4y} (P_4) = 100 \text{ kg}$

- Kuvvetlerin yatay ve düşey eksenler üzerindeki cebirsel toplamları ve bileşke gösterimleri çizilir.



Şekil 1.41: İki kuvvetin x ve y eksenlerindeki bileşke gösterimleri



- $\sum P_x = P_2x + P_3x = 86,6 + 88,375 = 174,975 \text{ kg}$  (x yatay eksen kuvvetleri bileşkesinin yönü sağdan sola doğrultuda) bulunur.

$P_2x$  ve  $P_3x$  kuvvetleri aynı yönde soldan sağa olduğundan (+) kabul edilir (Bu örnekte sağdan sola herhangi bir yatay kuvvet bulunmamaktadır).

- $\sum P_y = P_1y + P_2y - P_3y - P_4y = 125 + 50 - 88,375 - 100 = -13,75 \text{ kg}$  (y düşey eksen kuvvetleri bileşkesinin yönü aşağı doğrultuda) bulunur.

$P_1y$  ve  $P_2y$  kuvvetleri yukarı yönde olduğundan (+),  $P_3y$  ve  $P_4y$  kuvvetleri aşağı yönde (-) kabul edilir.

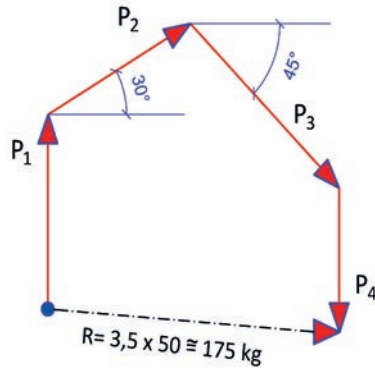
- Şekil 1.41'de x eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamları olan  $\sum P_x$  ve y eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamları olan  $\sum P_y$  arasındaki açı  $90^\circ$  olduğundan Cosinüs Teoremine göre

$$R^2 = (\sum P_x)^2 + (\sum P_y)^2 = (174,975)^2 + (-13,75)^2 = 30616,251 + 189,063 \text{ buradan da}$$

$R^2 = 30805,31 \text{ kg}$  olur. Eşitlikte her iki tarafının karekökü alınırsa  $R = 175,514 \text{ kg}$  bulunur.

### Kuvvetler Çokgeni Yöntemi

- $P_1 = 125 \text{ kg}$  kuvvet ölçeği  $50 \text{ kg} = 1 \text{ cm}$  olduğundan  $125/50 = 2,5 \text{ cm}$  yukarı yönde dik olarak çizilir (Şekil 1.42)
- $P_2 = 100 \text{ kg}$  olan kuvvet yatayla  $30^\circ$  açıyla yukarı yönlü  $100/50 = 2 \text{ cm}$  çizilir (Şekil 1.42).
- $P_3 = 125 \text{ kg}$  olan kuvvet yatayla  $45^\circ$  açıyla aşağı yönlü  $125/50 = 2,5 \text{ cm}$  çizilir (Şekil 1.42).
- $P_4 = 100 \text{ kg}$  olan kuvvet  $125/50 = 2,5 \text{ cm}$  aşağı dik yönlü çizilir (Şekil 1.42).
- $P_1$  kuvvetinin başlangıç noktası ile  $P_4$  kuvvetinin bitiş noktası olan uç kısmı birleştirilecek şekilde kesik noktalı çizgi ile çizilir ve R bileşkesinin uzunluğu bulunur (Şekil 1.42).
- R bileşke uzunluğu gönüye ile ölçülür. Ölçülen uzunluk  $3,5 \text{ cm}$  olacaktır (Şekil 1.42).
- Ölçülen uzunluk x kuvvet ölçeği bağıntısı ile bileşke kuvvetin değeri;  $R = 3,5 \times 50 \cong 175 \text{ kg}$  bulunur (Şekil 1.42).



Şekil 1.42: Kuvvetler çokgeni yöntemiyle ikiden çok kuvvetin bileşkesi



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için “Evet”, kazanamadığınız beceriler için “Hayır” kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
<b>İzdüşüm Yöntemi İle Bileşke Kuvvet Hesabı</b>			
1	Kuvvetlerin yatay (x) ve düşey (y) eksenindeki izdüşümleri değerlerinin hesaplanması için bağıntıları yazdınız mı?		
2	Dik ve açısız doğrultulu kuvvetlerin x (yatay) ve y (düşey) eksenlerindeki izdüşümlerini çizdiniz mi?		
3	Kuvvetlerin x ve y eksenleri üzerindeki izdüşüm değerlerini buldunuz mu?		
4	Kuvvetlerin yatay ve düşey eksenler üzerindeki cebirsel toplamları ve bileşke gösterimlerini çizdiniz mi?		
5	x yatay eksen kuvvetleri bileşkesinin yönü sağdan sola doğrultuda olacak şekilde yatay yönlü kuvvetlerin cebirsel toplamını buldunuz mu?		
6	y düşey eksen kuvvetleri bileşkesinin yönü aşağı doğrultuda olacak şekilde düşey yönlü kuvvetlerin cebirsel toplamını buldunuz mu?		
7	x ve y eksenlerinde bulduğunuz kuvvetlerin cebirsel toplamlarını Cosinüs Teoremi, $R^2 = (\sum Px)^2 + (\sum Py)^2$ bağıntısını kullanarak bileşkeyi hesapladınız mı?		
<b>Kuvvetler Çokgeni Yöntemi İle Bileşke Kuvvet Hesabı</b>			
1	$P_1$ kuvvetini kuvvet ölçeğini kullanarak yukarı yönde dik olarak çizdiniz mi?		
2	$P_2$ kuvvetini yatayla $30^\circ$ açıyla yukarı yönlü çizdiniz mi?		
3	$P_3$ kuvvetini yatayla $45^\circ$ açıyla aşağı yönlü çizdiniz mi?		
4	$P_4$ kuvvetini aşağı dik yönlü çizdiniz mi?		
5	$P_1$ kuvvetinin başlangıç noktası ile $P_4$ kuvvetinin bitiş noktası olan uç kısmı ile birleşecek şekilde kesik noktalı çizgi ile çizerek R bileşke uzunluğunu çizdiniz mi?		
6	R bileşke uzunluğunu gönye ile ölçüp ölçülen uzunluk x kuvvet ölçeği bağıntısı ile bileşke kuvvetin değerini hesapladınız mı?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

DEĞERLENDİRME					
Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	35	55	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:	Numarası:			Tarih	
				..... / ..... / .....	
Öğretmenin Adı Soyadı:	Onay :				



## HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

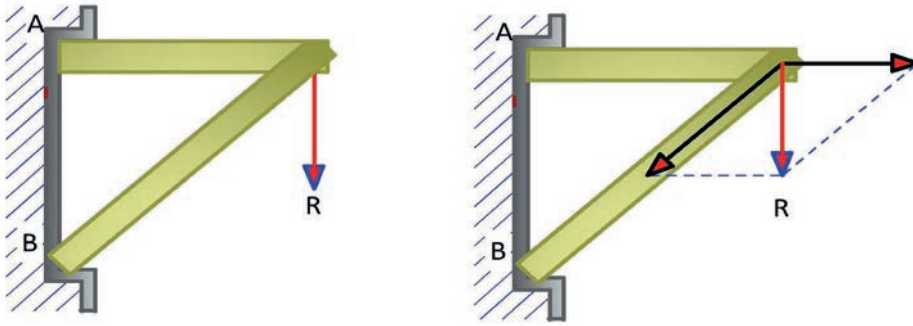
- Çevrenizde yapı elemanlarını ve cisimleri etkileyen kuvvetleri tespit ediniz.
- Tespit ettiğiniz bu kuvvetleri bileşenlerine nasıl ayırabileceğinizi düşününüz ve bunları arkadaşlarınızla paylaşınız.

## 1.3. KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA

Açısal konumda olan bir kuvveti x ve y eksenleri üzerinde ayrılmış iki kuvvet şeklinde ve dik konumda olan bir kuvvetin iki ayrı dik bileşene ayrılması, **kuvvetin bileşenlerine ayrılması** olarak tanımlanır. Bir kuvveti bileşenlerine ayırmak, o kuvveti birbirine dik veya paralel iki kuvvet şeklinde ifade etmektir. Kuvvetleri bileşenlerine ayırmak, cisimlere etkileyen yatay ve düşey kuvvetlerin değerlerinin belirlenmesini sağlar.

Bileşke kuvvetin meydana gelmesinde etkili olan kuvvetlerin her birine **bileşen kuvvet** denir.

Şekil 1.43'te verilen ankastre sistemde, A ve B noktalarına etki eden kuvvetlerin R kuvveti bileşenlerine ayrılması görülmektedir.



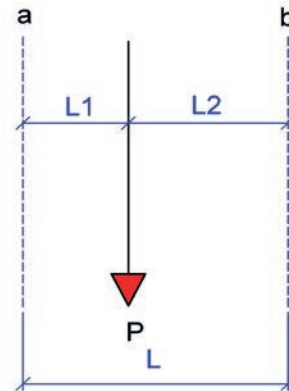
Şekil 1.43: Kuvvetin bileşenlere ayrılması

### 1.3.1. Kuvvetleri Bileşenlere Ayırma Yöntemleri

Kuvvetin bileşenlere ayrılmasında çeşitli yöntemler kullanılır. Bunlar; hesap yöntemi, ipçik çokgeni (ip poligonu veya füniküler çokgeni), sinüs (lami-sinüs) teoremi ve izdüşüm yöntemidir.

#### 1.3.1.1. Hesap Yöntemiyle Kuvvetlerin Bileşenlerine Ayrılması

Şekil 1.44'te görülen P kuvvetinin belirli mesafelerdeki bileşenleri  $P_1 = P \times L_2 / L$  ve  $P_2 = P \times L_1 / L$  bağıntıları kullanılarak hesaplanır.



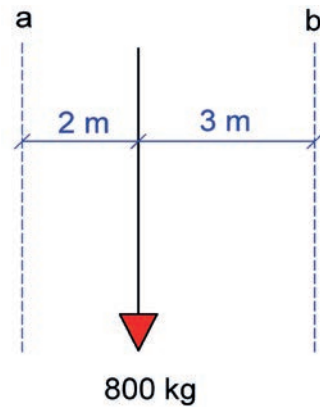
Şekil 1.44: Kuvvetin bileşenlere ayrılması

**Problem:** Şekil 1.45'te verilen kuvvetin bileşenlerinin değerlerini hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$P_1 = P \times L_2 / L = 800 \times 3 / 5 \text{ olduğuna göre } P_1 = 480 \text{ kg}$$

$$P_2 = P \times L_1 / L = 800 \times 2 / 5 \text{ olduğuna göre } P_2 = 320 \text{ kg}$$



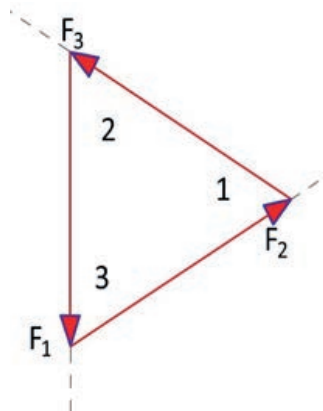
Şekil 1.45: Kuvvetin bileşenlere hesap yöntemi ile ayrılması

### 1.3.1.2. Sinüs (Lami-Sinüs) Teoremi ile Kuvvetlerin Bileşenlerine Ayrılması

Bu teoremin uygulanması için kuvvet sayısı 3 olmalı ve bu kuvvetler bir noktada kesişmelidir. Ayrıca, kuvvetlerin vektörel toplamı sifıra eşit olmalıdır.

Yani kuvvetlerin uç uca toplamında üçgen kapanmalıdır. Bir kuvvet ayrıştırılacağı kuvvetlerle gelişigüzel bir üçgen oluşturduğunda, kuvvetlerin karşısındaki açılar biliniyorsa "Lami-Sinüs Teoremi"ne göre işlem yapılır.

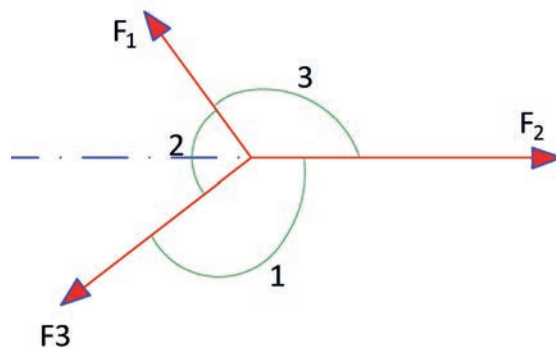
**İç Lami-Sinüs Teoremi:** Şekil 1.46'da görüldüğü gibi bileşke ve bileşen kuvvetlerin üçgeninde, kuvvetlerin karşısındaki açılarının sinüslerine oranı sabittir.



$$\frac{F_1}{\sin 1} = \frac{F_2}{\sin 2} = \frac{F_3}{\sin 3}$$

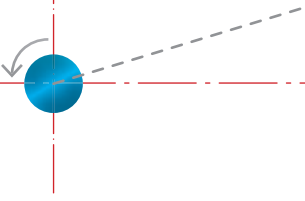
Şekil 1.46: Kuvvetin bileşenlerine İç Lami Teoremi ile ayrılması

**Dış Lami-Sinüs Teoremi:** Şekil 1.47'de görüldüğü gibi bileşke ve bileşen kuvvetlerin üçgeninde, kuvvetlerin karşısındaki açılarının sinüslerine oranı sabittir.

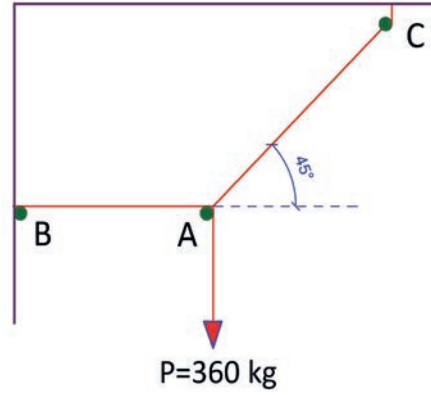


$$\frac{F_1}{\sin 1} = \frac{F_2}{\sin 2} = \frac{F_3}{\sin 3}$$

Şekil 1.47: Kuvvetin bileşenlerine Dış Lami Teoremi ile ayrılması

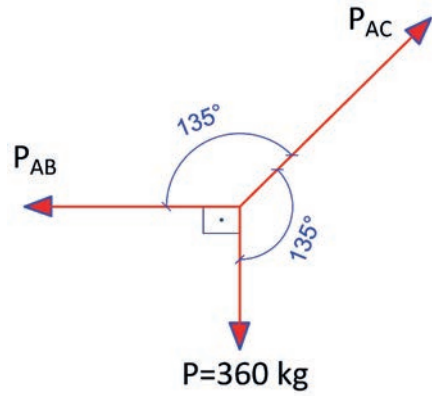


**Problem:** Şekil 1.48'de verilen  $P = 360 \text{ kg}$ 'lık kuvvetin; AB ve AC halatlarında oluşacak gerilme kuvvetlerini (bileşenlerini) hesaplayınız.  
( $\sin 135^\circ = 0,707$  ve  $\sin 90^\circ = 1$ )



Şekil 1.48: AB ve AC halatlarına asılı P kuvveti

**Çözüm:** Şekil 1.48'de verilen P kuvvetinin AB ve AC halatlarında oluşturduğu gerilme kuvvetlerinin Şekil 1.49'da olduğu gibi Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizilerek gösterilir.



Şekil 1.49: P kuvvetinin Serbest Cisim Diyagramı (SCD)

Lami Sinüs Teoremine göre;  $\frac{P_1}{\sin 1} = \frac{P_2}{\sin 2} = \frac{P_3}{\sin 3}$  bağıntısı ile bileşenler hesaplanır. Lami Sinüs eşitliğinden;

$$\frac{360}{\sin 135} = \frac{P_{AB}}{\sin 135} = \frac{P_{AC}}{\sin 90} \text{ şeklinde yazılır.}$$

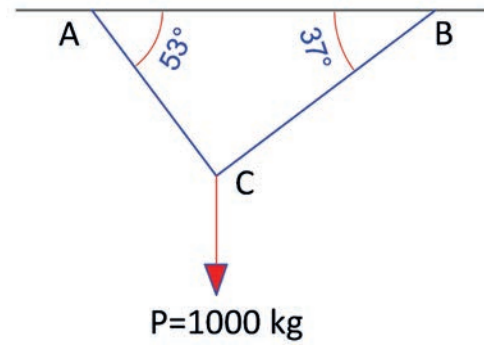
$$\text{Eşitlikteki } \frac{360}{\sin 135} = \frac{P_{AB}}{\sin 135} \text{ bağıntısından}$$

$\frac{360}{0,707} = \frac{P_{AB}}{0,707}$  ise içler dışlar çarpımı yapılırsa  $P_{AB} \times 0,707 = 360 \times 0,707$  olur ve  $P_{AB} = 360 \text{ kg}$  olarak bulunur.

$$\frac{360}{\sin 135} = \frac{P_{AC}}{\sin 90} \text{ ise } \frac{360}{0,707} = \frac{P_{AC}}{1} \text{ içler dışlar çarpımı sonucu } 360 \times 1 = P_{AC} \times 0,707 \text{ işleminde}$$

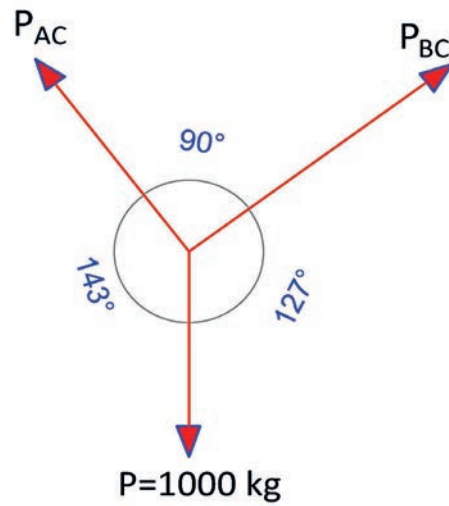
$P_{AC} = 509,183 \text{ kg}$  bulunur.

**Problem:** Şekil 1.50'de BC ve AC halatlarına bağlı  $P = 1000 \text{ kg}$ 'lık kuvvetin BC ve AC halatlarındaki gerilme kuvvetlerini (bileşenlerini) hesaplayınız.



Şekil 1.50: AC ve BC halatlarına asılı P kuvveti

**Çözüm:** Şekil 1.51'de P kuvveti ve halatlarda oluşan gerilme kuvvetlerini Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizilerek gösterilir.



Şekil 1.51: P kuvvetinin Serbest Cisim Diyagramı (SCD)

Lami Sinüs Teoremine göre;  $\frac{P_1}{\sin 1} = \frac{P_2}{\sin 2} = \frac{P_3}{\sin 3}$  bağıntısı ile bileşenler hesaplanır.

Lami Sinüs eşitliğinden

$$\frac{1000}{\sin 90} = \frac{P_{AC}}{\sin 127} = \frac{P_{BC}}{\sin 143} \text{ şeklinde yazılır. Eşitlikteki } \frac{1000}{\sin 90} = \frac{P_{AC}}{\sin 127} \text{ bağıntısından}$$

$$\frac{1000}{1} = \frac{P_{AC}}{0,8} \text{ ise içler dışlar çarpımı yapılırsa } P_{AC} \times 1 = 1000 \times 0,8 \text{ olur ve } \mathbf{P_{AC} = 800 \text{ kg}}$$

$$\frac{1000}{1} = \frac{P_{BC}}{0,6} \text{ ise } \frac{1000}{1} = \frac{P_{BC}}{0,6} \text{ içler dışlar çarpımı sonucu } 1000 \times 0,6 = P_{BC} \times 1 \text{ olur ve}$$

$\mathbf{P_{BC} = 600 \text{ kg}}$  bulunur.



### 1.3.1.3. Kuvvetin İpçik (İp Poligonu veya Füniküler) Çokgeni Yöntemiyle Bileşenlerine Ayrılması

Bir kuvvetin paralel iki bileşene ayrılmasını İpçik Çokgeni Yöntemiyle yapmak için kuvvet ölçeği ve uzunluk ölçeği belirlenir. İpçik Çokgeni Yönteminde herhangi bir kuvvet ölçeği ve uzunluk ölçeği seçilebilir.

Örneğin kuvvet ölçeği: 100 kg = 1 cm, Kuvvet ölçeği: 200 kg = 2 cm, Kuvvet ölçeği: 2 ton = 1 cm

Örneğin uzunluk ölçeği: 100 cm = 1 cm, Uzunluk ölçeği: 500 cm = 2 cm, Uzunluk ölçeği: 2 m = 1 cm

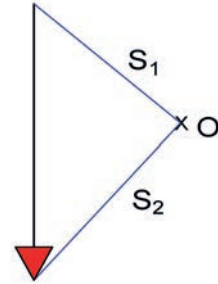
**Problem:** İpçik Çokgeni ile Şekil 1.52'de verilen  $P = 500$  kg'lık kuvveti bileşenlerine ayırınız.



Şekil 1.52: Kuvvet ile a ve b noktaları

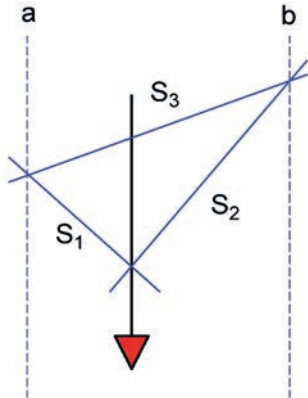
**Çözüm:** Kuvvet yeniden ölçekli olarak çizilir. Kuvvetin dışında bir O noktası belirlenir. Bu nokta ile P kuvvetinin başlangıcı ile bitiş noktaları O noktası ile birleştirilerek  $S_1$  ve  $S_2$  ipçikleri oluşturulur (Şekil1.53).

Kuvvet ölçeği: 200 kg = 1 cm, Uzunluk ölçeği: 1/100 olarak kabul edilerek Şekil 1.52'de görülen kuvvet ile kuvvetin a ve b noktaları arasındaki uzunluklar verilen ölçeklerde çizilir.



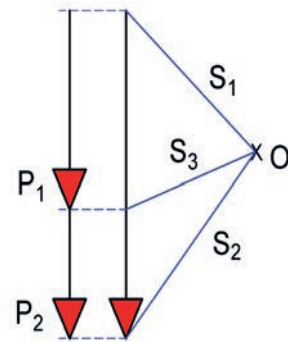
Şekil 1.53: Kuvvetin dışında O noktası belirlenmesi ve  $S_1$  ve  $S_2$  ipçiklerinin çizilmesi

- $S_1$  ve  $S_2$  ipçikleri a ve b doğrultularına paralel olarak taşınır.  $S_1$  a ve  $S_2$  b kesişimleri birleştirilerek  $S_3$  ipçığı bulunur (Şekil 1.54).



Şekil 1.54: Kuvvetin dışında O noktası belirlenmesi ve  $S_1$  ve  $S_2$  ipçiklerinin çizilmesi

- $S_3$  ipçığı, daha önceden oluşturulan sisteme paralel olarak taşınır. P kuvveti iki paralel bileşene ayrılır. Kuvvet ölçeği kullanılarak kuvvetlerin değeri bulunur (Şekil 1.55).



Şekil 1.55: Kuvvetin paralel iki kuvvete ayrılması çizilmesi

$P_1 = 1,4$  cm x 200 buradan da  $P_1 = 280$  kg olur.

$P_2 = 1,1$  cm x 200 buradan da  $P_2 = 220$  kg olur.

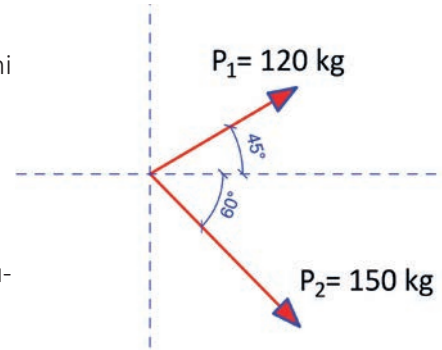
### 1.3.1.4. İzdüşüm Yöntemiyle Kuvvetlerin Bileşenlerine Ayrılması

Kuvvetlerin bileşenlerine ayrılmasında kullanılan İzdüşüm Yöntemi ile ilgili kuvvetlerin bileşke hesapları konusu içerisinde yer verilmişti. İzdüşüm Yöntemi ile ilgili kuvvetlerin bileşenlerine ayrılmasını bir örnek ile daha pekiştirelim.

**Problem:** Şekil 1.56'da verilen  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin bileşenlerini İzdüşüm Yöntemi ile bulunuz.

( $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0,707$ ;  $\cos 60^\circ = 0,5$  ve  $\sin 60^\circ = 0,866$ )

Şekil 1.56'da verilen kuvvetlerin x ve y eksenleri üzerindeki izdüşümleri çizilerek bileşenleri gösterilir (Şekil 1.57).



Şekil 1.56: Kesişen kuvvetler

**Çözüm:**

$P_1$  kuvvetinin x yatay eksenindeki bileşeni:

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos 45^\circ = 120 \times 0,707 = 84,84 \text{ kg olur.}$$

$P_2$  kuvvetinin x yatay eksenindeki bileşeni:

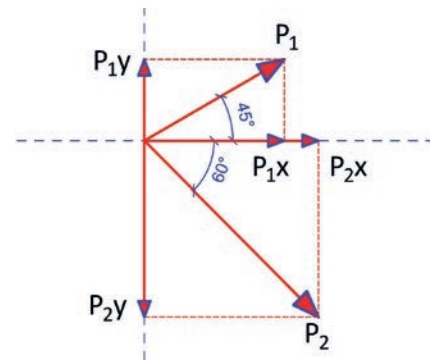
$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 150 \times 0,5 = 75 \text{ kg olur.}$$

$P_1$  kuvvetinin y yatay eksenindeki bileşeni:

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin 45^\circ = 120 \times 0,707 = 84,84 \text{ kg olur.}$$

$P_2$  kuvvetinin y yatay eksenindeki bileşeni:

$$P_{2y} = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 150 \times 0,866 = 129,9 \text{ kg olur.}$$

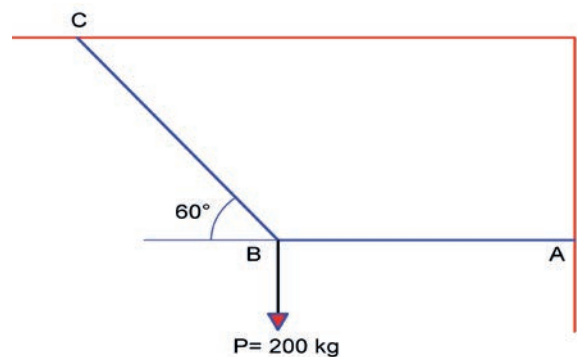


Şekil 1.57: Kesişen kuvvetlerin bileşenleri



#### SIRA SİZDE

Şekil 1.58'de verilen sistemde AB ve BC halatlarına B noktasında  $P = 200 \text{ kg}$ 'lık kuvvet asılmıştır. BC halatında oluşan gerilme kuvvetini ( $T_{BC}$ ) ve AB halatında oluşan gerilme kuvvetini ( $T_{AB}$ ) Lami Sinüs Teoremi ile hesaplayınız?



Şekil 1.58: AB ve BC halatlarını etkileyen kuvvet

6 DERS SAATI

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır

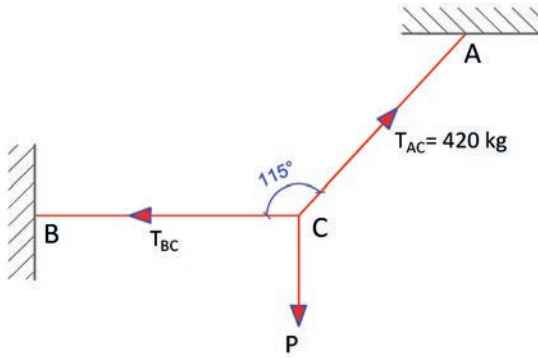


36142

Bu çalışmanın amacı, kuvvetleri uygun yöntem ile bileşenlere ayırmaktır.

### Görev

Kuvvetlerin bileşenlerine ayrılması uygulamasını, işlem basamaklarına göre öğretmeninizin gözetiminde yerine getiriniz.



Şekil 1.59: Kuvvetin bileşenlere ayrılması uygulaması

Şekil 1.59'da verilen sistemde AC ve BC halatlarına C noktasında P kuvveti asılmıştır. AC halatında oluşan gerilme kuvveti  $T_{AC} = 420$  kg olduğuna göre

- $T_{BC}$  ve P kuvvetlerini **Lami Sinüs Teoremi** ile hesaplayınız.
- $T_{BC}$  ve P kuvvetlerini **İzdüşüm Yöntemi** ile hesaplayınız.

### Yönerge

- Çalışmanızda Şekil 1.59'da verilen açılara dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde net olarak görebilirsiniz.

### İşlem Basamakları

#### Lami Sinüs Teoremi

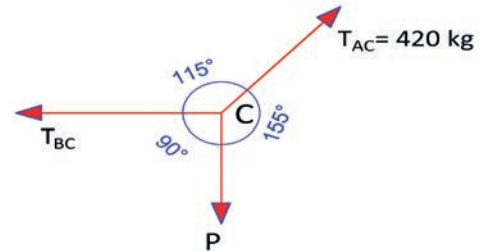
- Şekil 1.59'da verilen sistemde bulunan halatlarda oluşan gerilme kuvvetlerinin Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizilir (Şekil 1.60).

- Lami Sinüs Teoremi,  $\frac{P_1}{\sin 1} = \frac{P_2}{\sin 2} = \frac{P_3}{\sin 3}$  bağıntısı yazılır.

- $\frac{P}{\sin 115} = \frac{T_{AC}}{\sin 90} = \frac{T_{BC}}{\sin 155}$  eşitliğinde bilinen değerler yazılır.

- $\frac{P}{0,906} = \frac{420}{1} = \frac{T_{BC}}{0,422}$  olur.  $\frac{P}{0,906} = \frac{420}{1}$  eşitliğinde içler dışlar çarpımı yapılır.

$P \times 1 = 420 \times 0,906$  ve **P= 380,52 kg** bulunur.



Şekil 1.60: Kuvvetlerin Lami Sinüs Teoremine göre Serbest Cisim Diyagramı (SCD)

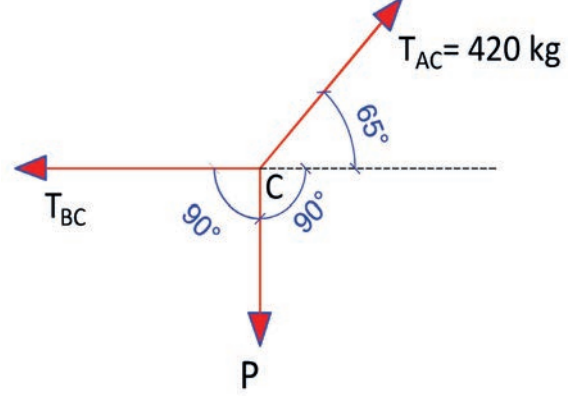


- $\frac{420}{1} = \frac{T_{BC}}{0,422}$  eşitliğinde içler dışlar çarpımı yapıldığında  $T_{BC} \times 1 = 420 \times 0,422$  olur.

$T_{BC} = 177,24 \text{ kg}$  bulunur.

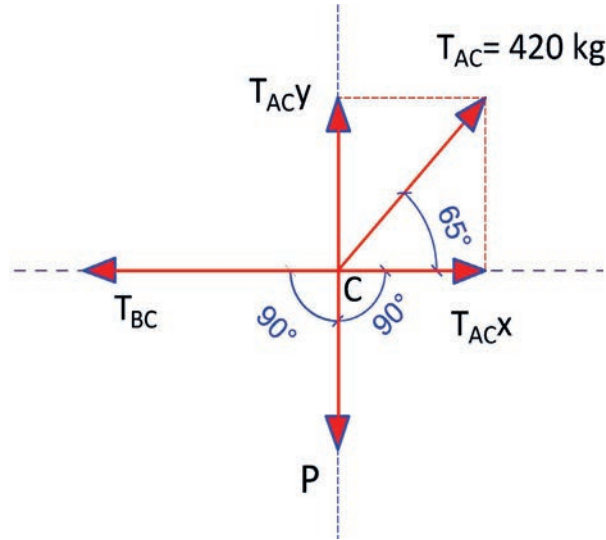
### İzdüşüm Yöntemi

- Kuvvetlerin İzdüşüm Yöntemine göre Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizilir (Şekil 1.61).



Şekil 1.61: Kuvvetlerin İzdüşüm Yöntemine Göre Serbest Cisim Diyagramı (Scd)

- Kuvvetlerin x ve y eksenleri üzerinde izdüşüm düzlemlerindeki bileşenleri gösterilir.



Şekil 1.62: Kuvvetlerin izdüşüm düzlemlerindeki bileşenleri

- Şekil 1.62'den kuvvetlerin x ve y eksenleri üzerindeki izdüşümlerinin değerleri bulunur.

x yatay ekseninde kuvvetlerin izdüşümleri:  $T_{ACx} = T_{AC} \cdot \cos 65^\circ = 420 \times 0,422 = 177,24 \text{ kg}$

$$T_{ACx} = T_{BC} = 177,24 \text{ kg olur.}$$

y yatay ekseninde kuvvetlerin izdüşümleri:  $T_{ACy} = T_{AC} \cdot \sin 65^\circ = 420 \times 0,906 = 380,52 \text{ kg}$

$$P = T_{ACy} = 380,52 \text{ kg olur.}$$



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için “Evet”, kazanamadığınız beceriler için “Hayır” kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

### ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ

Evet Hayır

#### Lami Sinüs Teoremi ile Kuvvetlerin Bileşenlerinin Hesaplanması

1	Şekil 1.59’da verilen sistemde bulunan halatlarda oluşan gerilme kuvvetlerinin Serbest Cisim Diyagramını (SCD) çizdiniz mi?		
2	Lami Sinüs Teoremi, $\frac{P_1}{\sin 1} = \frac{P_2}{\sin 2} = \frac{P_3}{\sin 3}$ bağıntısını yazdınız mı?		
3	$\frac{P}{\sin 115} = \frac{T_{AC}}{\sin 90} = \frac{T_{BC}}{\sin 155}$ eşitliğinde bilinen değerleri yazdınız mı?		
4	P kuvvetinin değerini eşitlikten faydalanarak hesapladınız mı?		
5	$T_{BC}$ kuvvetinin değerini eşitlikten faydalanarak hesapladınız mı?		

#### İzdüşüm Yöntemi ile Kuvvetlerin Bileşenlerinin Hesaplanması

1	Kuvvetlerin İzdüşüm Yöntemine göre Serbest Cisim Diyagramını (SCD) çizdiniz mi?		
2	Kuvvetlerin x ve y eksenleri üzerinde izdüşüm düzlemlerindeki bileşenlerini gösterdiniz mi?		
3	Şekil 1.62’den P ve $T_{BC}$ kuvvetlerinin x ve y eksenleri üzerindeki izdüşümlerinin değerlerini buldunuz mu )		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

### DEĞERLENDİRME

Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	35	55	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:	Numarası:			Tarih	
				..... / ..... / .....	
Öğretmenin Adı Soyadı:	Onay :				

## 1.5. UYGULAMA

# KUVVETLERİ BİLEŞENLERE AYIRMA VE BİLEŞKE KUVVET HESAPLARI

2 DERS SAATI

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



36143

Bu çalışmanın amacı, kuvvetlerin bileşenlere ayrılması ve bileşkesinin bulunması ile ilgili uygulamalar yapmaktır.



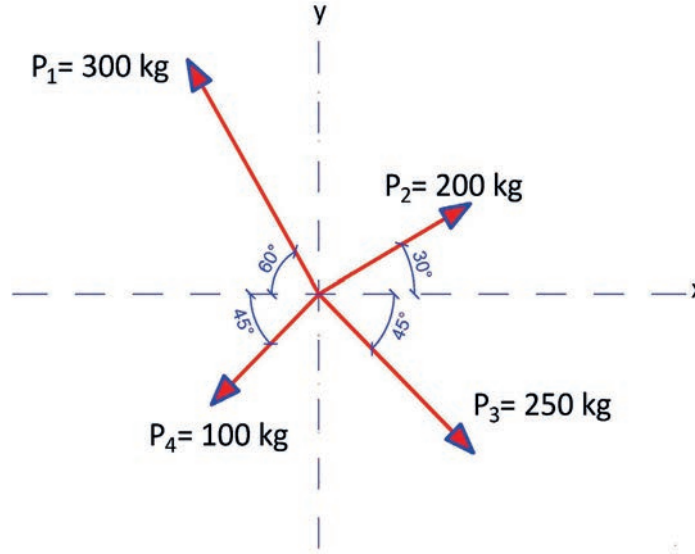
## Görev

Bileşenlere ayırma ve bileşke kuvvetin bulunması uygulamalarını, işlem basamaklarına göre öğretmenin gözetiminde yerine getiriniz.

Şekil 1.63'te verilen kuvvetleri

- İzdüşüm yöntemiyle bileşenlerine ayırınız.
- İzdüşüm yöntemiyle kuvvetlerin bileşkesini bulunuz.

$\cos 30^\circ = 0,866$  ve  $\sin 30^\circ = 0,5$ ;  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0,707$ ;  $\cos 60^\circ = 0,5$  ve  $\sin 60^\circ = 0,866$



Şekil 1.63: Kesişen kuvvetlerin bileşenlere ayrılarak bileşkesi

## Yönerge

- Çalışmanızda Şekil 1.63'te verilen sistemde açılara dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde net olarak görebilirsiniz.

## İşlem Basamakları

- Şekil 1.63'te verilen kuvvetlerin x(yatay) ve y(dikey) eksenindeki izdüşümlerinin hesaplanması için bağıntıları yazılır.
- Açılal doğrultulu kuvvetlerin x (yatay) ve y (düşey) eksenlerinde izdüşümleri çizilir.
- Şekil 1.63'ten kuvvetlerin x ve y eksenleri üzerindeki izdüşümlerinin değerleri bulunur.
- Kuvvetlerin yatay ve düşey eksenler üzerindeki cebirsel toplamları ve bileşke gösterimleri çizilir.
- $\sum Px$ , x yatay eksen kuvvetlerinin cebirsel toplamı ile bileşkesinin yönü bulunur.
- $\sum Py$ , y düşey eksen kuvvetlerinin cebirsel toplamı ile bileşkesinin yönü bulunur.
- $R^2 = (\sum Px)^2 + (\sum Py)^2$  bağıntısını kullanarak bileşke hesaplanır.



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için “Evet”, kazanmadığınız beceriler için “Hayır” kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	Kuvvetlerin yatay (x) ve düşey (y) eksenindeki İzdüşümlerinin değerlerinin hesaplanması için bağıntıları yazdınız mı?		
2	Açısal doğrultulu kuvvetlerin x (yatay) ve y (düşey) eksenlerindeki İzdüşümlerini çizdiniz mi?		
3	Kuvvetlerin x ve y eksenleri üzerindeki İzdüşüm değerlerini buldunuz mu?		
4	Kuvvetlerin yatay ve düşey eksenler üzerindeki cebirsel toplamları ve bileşke gösterimlerini çizdiniz mi?		
5	x yatay eksen kuvvetleri bileşkesinin yönü sağdan sola doğrultuda olacak şekilde yatay yönlü kuvvetlerin cebirsel toplamını buldunuz mu?		
6	y düşey eksen kuvvetleri bileşkesinin yönü aşağı doğrultuda olacak şekilde düşey yönlü kuvvetlerin cebirsel toplamını buldunuz mu?		
7	x ve y eksenlerinde bulduğunuz kuvvetlerin cebirsel toplamlarını Cosinüs Teoremi, $R^2 = (\sum Px)^2 + (\sum Py)^2$ bağıntısını kullanarak bileşkeyi hesapladınız mı?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

## DEĞERLENDİRME

Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	25	65	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:	Numarası:		Tarih		
			..... / ..... / .....		
Öğretmenin Adı Soyadı:	Onay :				

## 1. ÖĞRENME BİRİMİ NOTLARIM

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Aşağıda verilen çoktan seçmeli test maddelerinden oluşan soruları cevaplayınız.

1. Dünya'nın "m" kütleli bir cisme uyguladığı çekim kuvveti bağıntısı aşağıdaki seçeneklerin hangisinde doğru verilmiştir?

A)  $P = G \cdot \frac{Md \cdot m}{rd^2}$

B)  $P = G \cdot \frac{m1 \cdot m2}{d^2}$

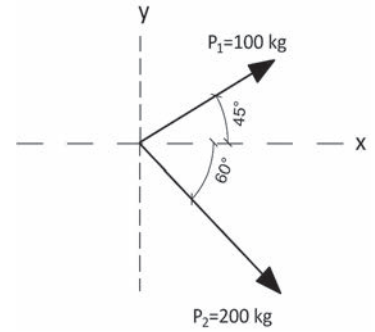
C)  $P^2 = g \cdot \frac{md \cdot mg}{Rd^2}$

D)  $P = g \cdot \frac{Ma \cdot m}{rg^2}$

E)  $P^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 \cdot m_2$

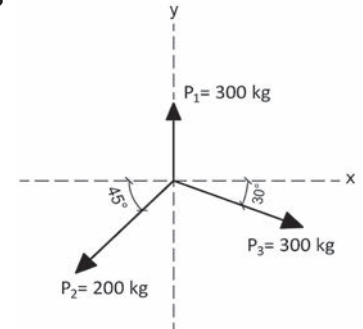
2. Şekilde verilen  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin bileşkesi kaç kg'dır?

- A) 188,65  
B) 175,45  
C) 199,12  
D) 150,60  
E) 132,75



3. Şekilde verilen  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  kuvvetlerinin bileşkesi kaç kg'dır?

- A) 195,66  
B) 175,17  
C) 165,48  
D) 210,79  
E) 118,77



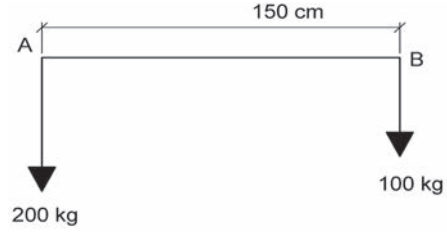
4. Bir cisme aynı yön ve aynı doğru boyunca etkiyen iki ve daha fazla kuvvetin bir araya getirilmesi sonucu kuvvetlerin bileşkesi bulunur. Bu kuvvetlerin bileşkesinin şiddeti ise kuvvetlerin toplam şiddetine eşittir.

Yukarıda verilen tanım seçeneklerde verilenlerden hangisine aittir?

- A) Kesişen iki kuvvetin bileşkesi  
B) Paralel kuvvetlerin bileşkesi  
C) Kesişen iki kuvvetin bileşkesi  
D) Aynı doğrultudaki kuvvetlerin bileşkesi  
E) Genel kuvvetlerin bileşkesi

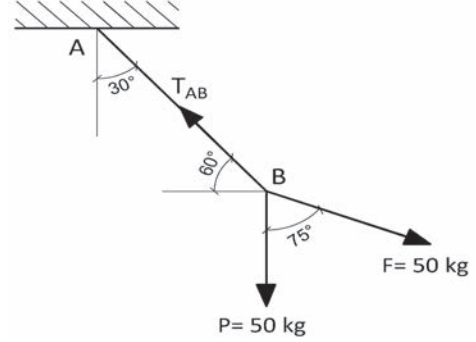
5. Şekilde verilen 200 kg ve 100 kg'lık aynı yönlü paralel iki kuvvetin bileşkesinin yerinin A noktasına olan uzaklığı kaç cm'dir?

- A) 150  
B) 100  
C) 50  
D) 25  
E) 15



6. Şekilde A noktasındaki halat P ve F kuvvetlerinin etkisi altındadır. Sistem dengede olduğuna göre halatta oluşan  $T_{AB}$  gerilme kuvveti kaç kg'dır?

- A) 145,63  
B) 108,72  
C) 105,57  
D) 100,54  
E) 96,59



7. Aşağıdakilerden hangisi kuvveti oluşturan elemanlardan birisidir?

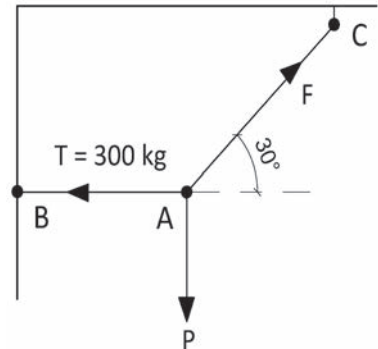
- A) Doğrultusu B) Akışkanlığı C) Statikliği D) Dinamikliği E) Gerilmesi

8. Bir cisme uygulanan birden fazla kuvvetin yapmış olduğu etkiyi tek başına yapan kuvvete ne ad verilir?

- A) Bileşen kuvvet B) Bileşke kuvvet C) Toplam kuvvet D) Statik kuvvet E) Tepki kuvveti

9. Şekildeki AB ve AC halatları P kuvvetinin etkisi altındadır. Sistem dengede ve AB halatındaki gerilme kuvveti  $T = 300$  kg olduğuna göre P kuvveti kaç kg'dır?

- A) 148,60  
B) 156,65  
C) 165,33  
D) 173,21  
E) 346,42



10. Aşağıdaki seçeneklerde verilenlerden hangisi bir kuvveti bileşenlerine ayırmak için kullanılan yöntemlerden biri değildir?

- A) Füniküler çokgeni  
B) Lami-Sinüs teoremi  
C) Cosinüs teoremi  
D) İzdüşüm yöntemi  
E) Hesap yöntemi



Ölçme Değerlendirme sorularını cevaplamayı tamamladıysanız kitabın sonunda verilen cevap anahtarından cevaplarınızı kontrol edebilirsiniz. Yanlış cevapladığınız soruları öğretmenize sorunuz.

# 2.

ÖĞRENME  
BİRİMİ

## DENGE VE MOMENT HESAPLARI

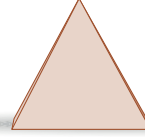
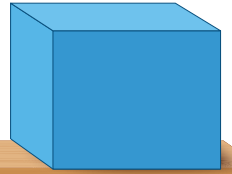
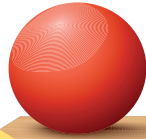
### KONULAR

2.1. DENGE HESAPLARI

2.2. DENGE HESAPLARI UYGULAMASI

2.3. MOMENT HESAPLARI

2.4. MOMENT HESAPLARI UYGULAMASI



### NELER ÖĞRENECEKSİNİZ ?

- Denge hesapları
- Denge hesapları uygulamaları
- Moment hesapları
- Moment hesapları uygulamaları

### TEMEL KAVRAMLAR

denge, denge koşulları, eksene göre moment, kuvvet çifti ve momenti, moment, noktaya göre moment, varignon teoremi





## HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Çevrenizdeki yapı elemanlarının ve cisimlerin denge hâllerini inceleyiniz.
- Yapmış olduğunuz incelemelerinizi arkadaşlarınızla paylaşınız.

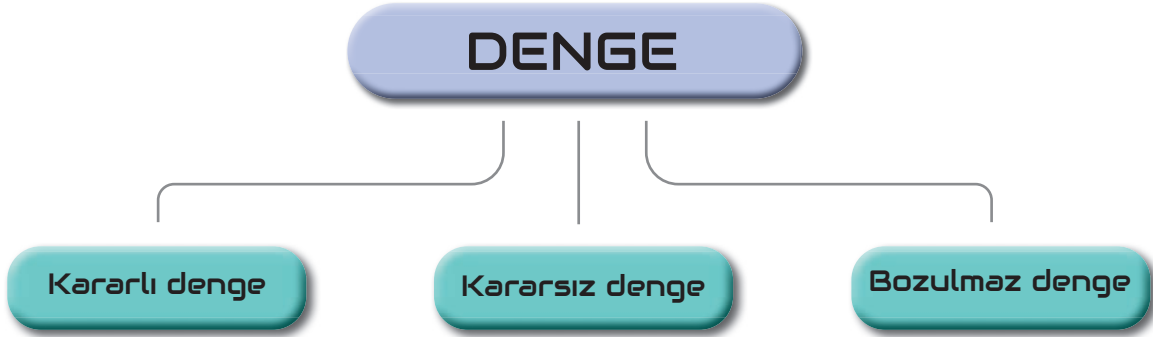
## 2.1. DENGE HESAPLARI

Cismin durduğu ya da kütle merkezinin sabit hızla hareket ettiği durum **denge** olarak ifade edilir. Bir cisim etki eden net kuvvet sıfır (0) ise cisim dengededir. Bir cisme etki eden kuvvetlerin dengede olabilmesi için kuvvetlerin doğrultuları aynı noktada kesişmelidir.

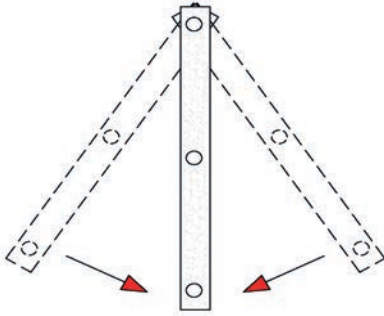
Denge hesaplarını yapabilmek için denge türleri ve şartlarının temel ilkeleri bilinmelidir. Üç bilinmeyenin olduğu sistemlerde bilinmeyenler denge şartları kullanılarak belirlenir.

### 2.1.1. Denge Türleri ve Şartları

Cisimlerin şeklinde ve hızında değişiklik olmadan sahip olduğu durumu korumasına ya da aynı durumu devam ettirmesine **denge hâli** denir. Üç türlü denge vardır.

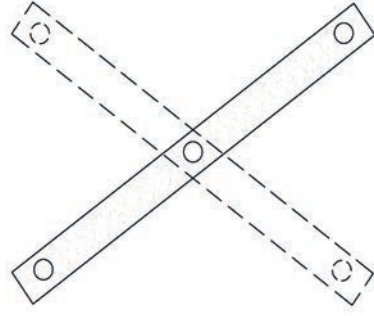


Durumu değiştirilen cisim serbest bırakılırsa tekrar ilk durumuna gelir. Kararlı dengede cismin ağırlık merkezi mümkün olan en aşağı durumda veya asılma noktasının altındadır.



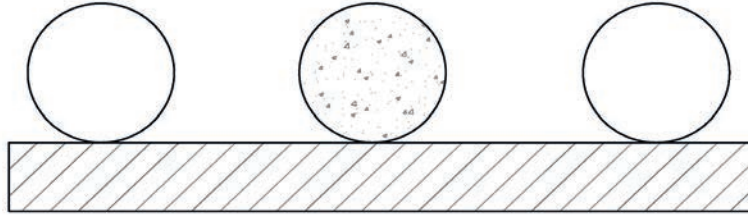
Şekil 2.1: Kararlı denge

Küçük bir sarsıntı ile durumu değişen cisim, kendi kendine eski durumuna gelemmez. Durumu değişen cisim kararlı dengeye dönüşebilir (Şekil 2.1). Kararsız dengede, cismin ağırlık merkezi mümkün olan en yüksek yerde veya asılma noktasının üstündedir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2: Kararsız denge

Durumu değiştirilen cisim her zaman dengesini korur. Böyle dengede cismin ağırlık merkezi daima aynı yüksekliği korur. Denge bozulmaz (Şekil 2.3).



Şekil 2.3: Bozulmaz denge

**Denge Şartları:** Cisimlerin ya da yapı elemanlarının dengede olabilmesi için onları etkileyen kuvvetlerin bileşkesi sıfır olmalıdır. Cisme etki yapan kuvvete eşit değerde ve ters yönde tepki kuvvetinin doğması da dengeyi sağlar. Bileşkenin sıfır olması, cismin yer değiştirmesini önlese de dönmeyi önleyemez. Çünkü bir noktaya bağlı olan cisim, döndürücü etki altında bulunabilir. O hâlde, dengenin tam olabilmesi için cisme etki yapan kuvvetlerin bağlı bir noktaya göre döndürme momentlerinin cebirsel toplamı da sıfır olmalıdır. Bu sayede dönme önlenmiş olur.

**I. Denge Koşulu:** Katı cismin öteleme hareketi yapmaması için cisme etki eden bileşke kuvvet sıfır olmalıdır. Cebirsel toplam anlamına gelen  $\Sigma$  (sigma) sembolünü kullanarak bu durumu aynı doğrultulu kuvvetler için  $\Sigma P = 0$  şeklinde gösterebiliriz. Kuvvetlerin doğrultuları kesişiyorsa x ve y eksenini doğrultusundaki bileşenlerin cebirsel toplamı ayrı ayrı sıfır olmalıdır.

Bu durumda

Yatay bileşenlerin cebirsel toplamı  $\Sigma P_x = 0$

Düşey bileşenlerin cebirsel toplamı  $\Sigma P_y = 0$  şeklinde gösterilir.

**II. Denge Koşulu:** Katı cismin dönme hareketi yapmaması için seçilen bir noktaya göre momentlerinin cebirsel toplamı sıfır olmalıdır. Bu şart;  $\Sigma M = 0$  şeklinde gösterilir.

I. ve II. denge koşulları aynı anda gerçekleşiyor ise cisim denge halindedir. İki boyutlu bir yapının tam olarak dengede olabilmesi için

$\Sigma P_x = 0$ : Bütün yatay kuvvetlerin cebirsel toplamı sıfıra eşit,

$\Sigma P_y = 0$ : Bütün dikey kuvvetlerin cebirsel toplamı sıfıra eşit,

$\Sigma M = 0$ : Bütün kuvvetlerin herhangi bir nokta (eksen) etrafındaki momentlerinin cebirsel toplamı sıfıra eşit demektir.

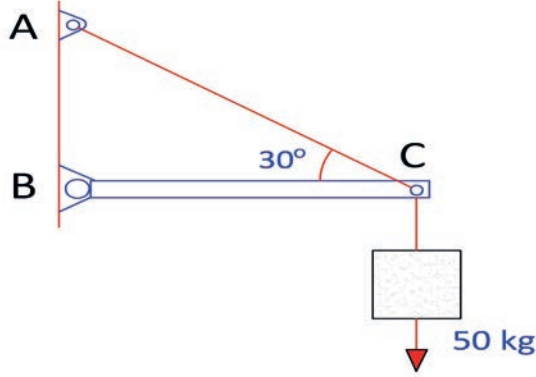
Bu denklemler, iki boyutlu (düzlem) yapıların statik dengesi için 3 denge denklemi olarak bilinir. 3 denklemin sağlanabilmesi için yeterli bağların ve bunlara karşılık gelen mesnet reaksiyonların sağlanması şarttır. Üç ayrı denklem ile üç bilinmeyen şiddeti belirlenebilir.

Yapı yeterli mesnetle bağlanmışsa (3'ten az olmayan bilinmeyen reaksiyonlar) yapı denge koşullarında belirtilen eşitliklerle tam olarak analiz edilebilir ve statik olarak belirlidir. Bu durum **izostatik sistem** olarak adlandırılır.

Eğer bilinmeyen sayısı üçten fazla ise sadece 3 denklemi kullanarak çözüm mümkün değildir ve yapı statik olarak belirsizdir. Bu durum **hiperstatik sistem** olarak adlandırılır.

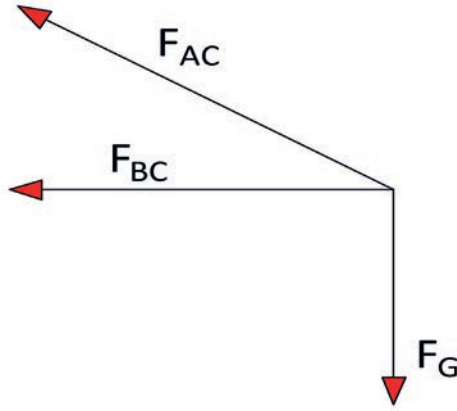
Denge koşullarını oluşturan I. ve II. denge koşulları kullanılarak izostatik sistemlerde bilinmeyenler hesaplanabilir. Hiperstatik sistemler ise I. ve II. denge koşulları ile birlikte farklı çözüm yöntemleri kullanılarak bilinmeyenler hesaplanır.

**Problem:** Şekil 2.4'te 50 kg ağırlığında bir cisim, yatayla 30 derecelik açı yapan bir AC halatı ve yatay duran bir BC çubuğunun ucuna asılmıştır. Halat ve çubukta oluşan gerilme kuvvetlerinin şiddetini ve yönlerini hesaplayınız (BC çubuğu ağırlıksız kabul edilecektir.).



Şekil 2.4: BC Çubuğu, halat ve etkileyen kuvvet

**Çözüm:** Halat, çubuk ve ağırlık kuvvetleri C noktasında kesilmektedir. Bu durum serbest çizim diyagramını Şekil 2.5'te olduğu gibi gösterilir.



Şekil 2.5: BC Çubuğu, halat ve etkileyen kuvvet serbest cisim diyagramı

Şekil 2.5'te görülen serbest cisim diyagramında kuvvetlerin durumuna göre  $\Sigma F_x = 0$  ve  $\Sigma F_y = 0$  olduğundan I. denge koşullarını kullanarak AC ve BC çubuklarındaki çekme kuvvetleri hesaplanırsa

$$(\rightarrow +) \Sigma F_x = 0$$

$$- F_{AC} \cdot \cos 30 - F_{BC} = 0$$

$$(\uparrow +) \Sigma F_y = 0$$

$$F_{AC} \cdot \sin 30 - F_G = 0$$

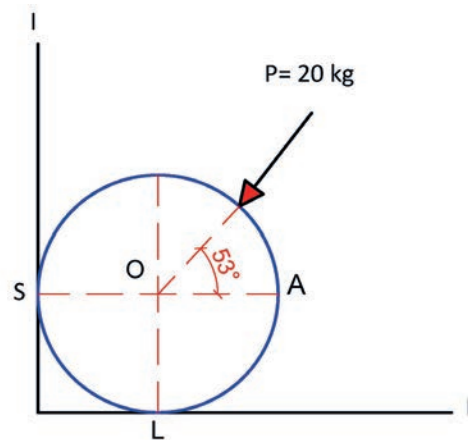
$$F_{AC} \cdot \sin 30 - 50 \text{ kg} = 0 \Rightarrow F_{AC} = 100 \text{ kg olur.}$$

$- F_{AC} \cdot \cos 30 - F_{BC} = 0$  olduğundan  $F_{AC}$  değerini yerine yazılırsa

$$-100 \cdot \cos 30 - F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BC} = -86,6 \text{ kg bulunur.}$$

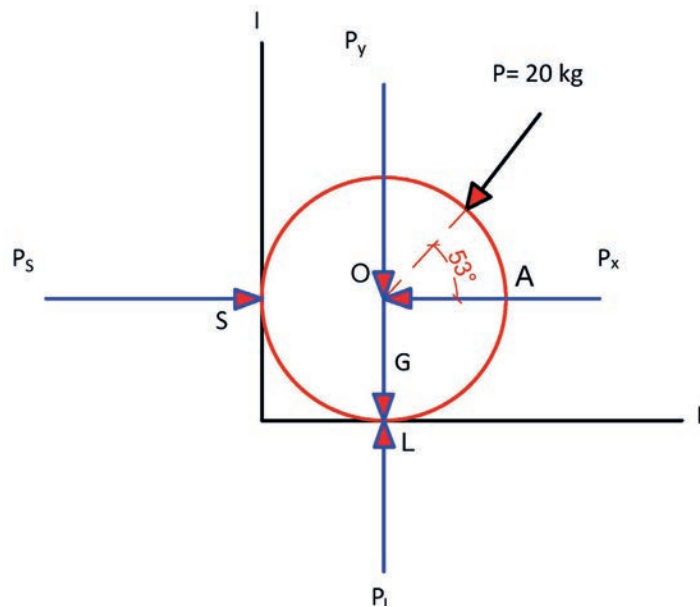
Burada  $F_{BC}$  gerilme kuvvetinin eksi (-) çıkması, serbest cisim diyagramında gösterilen durumun tersi yönünde olduğu, yani çubukta oluşan gerilme kuvvetinin sağdan sola doğru uygulandığı belirlenmiş olur.

**Problem:** O merkezli türdeş küreye Şekil 2.6'da görüldüğü gibi 20 kg'lık kuvvet etki etmektedir. P kuvvetinin O merkezli türdeş küreye yaptığı açı  $53^\circ$  dir ve sistem dengededir. Türdeş küreye L noktasındaki tepki kuvveti 30 kg ise kürenin ağırlığı (G) ve S noktasındaki tepki kuvveti ( $P_s$ ) kaç kg'dır.



Şekil 2.6: O merkezli türdeş küre ve etkileyen kuvvet

**Çözüm:** Şekil 2.7'de görüldüğü gibi küreye etki eden P kuvveti ile S noktasında  $P_s$  tepki kuvveti, L noktasında  $P_L$  tepki kuvveti ve L noktasında kürenin ağırlığı G etkisi oluşacaktır. P kuvvetinin x ve y eksenlerindeki izdüşümleri ile oluşan etkileri ise  $P_x$  ve  $P_y$  olacaktır.



Şekil 2.7: O merkezli türdeş küre ve kuvvetlerin serbest cisim diyagramı

Öncelikle Şekil 2.7'de görülen P kuvvetinin x ve y eksenleri üzerindeki izdüşümleri olan  $P_x$  ve  $P_y$  kuvvetleri hesaplanırsa

$$P_y = P \cdot \sin 53^\circ = 20 \times 0,8$$

$$P_y = 16 \text{ kg olur.}$$

$$P_x = P \cdot \cos 53^\circ = 20 \times 0,6$$

$$P_x = 12 \text{ kg olur.}$$

Sistem dengede olduğundan; yukarı yönlü ve soldan sağa yönlü kuvvetleri (+), aşağı yönlü ve sağdan sola yönlü kuvvetler (-) kabul edilirse

$$(\uparrow +) \Sigma P_y = 0$$

$$- P_y + G + P_L = 0 \text{ olacaktır.}$$

$$-16 - G + 30 = 0$$

$$G = 14 \text{ kg bulunur.}$$

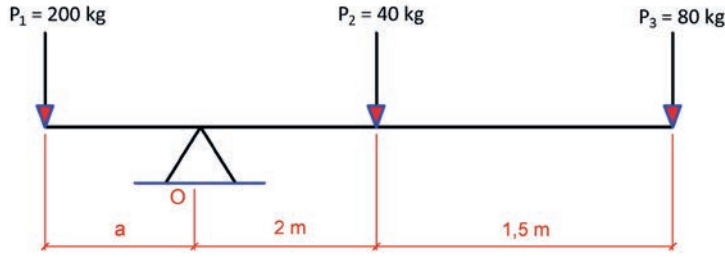
$$(\rightarrow +) \Sigma P_x = 0$$

$$- P_x + P_s = 0 \text{ olacaktır.}$$

$$- 12 + P_s = 30$$

$$P_s = 18 \text{ kg bulunur.}$$

**Problem:** Şekil 2.8'de verilen konsol kiriş sisteminin dengede olabilmesi için a mesafesi kaç metre olacaktır.



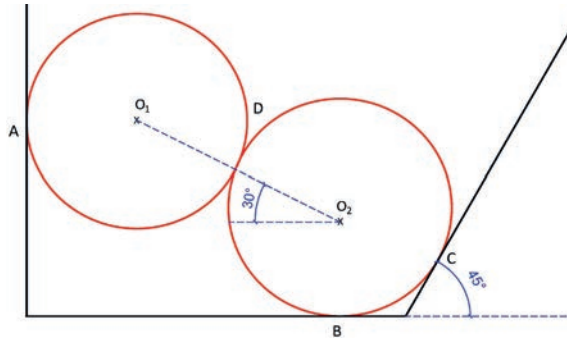
Şekil 2.8:  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  kuvvetlerinin etkisi altındaki konsol kiriş

**Çözüm:** Şekil 2.8'de verilen konsol kiriş ve yükleme durumu doğrultusunda II. denge koşulu ile O noktasına göre moment alınarak a mesafesi belirlenir. Çözümde Moment = Kuvvet x Kuvvet kolu bağıntısı kullanılarak hesap yapılır. Bura da kuvvetler  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  olarak verilmiştir. Kuvvet kolu ise kuvvetlerin etki ettiği nokta ile moment alınacak O noktasına olan uzaklıklardır.

$$(\curvearrowright +) \sum M_O = 0 \quad - P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2 + P_3 \cdot 3,5 = 0 \quad - 200a + 40 \cdot 2 + 80 \cdot 3,5 = 0$$

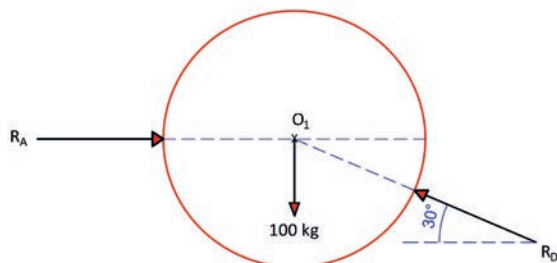
$$- 200a + 80 + 280 = 0 \quad 200a = 360 \text{ ise } a = 360/200 \quad \mathbf{a = 1,8 \text{ m}}$$

**Problem:** Her biri 100 kg ağırlığında türdeş iki çelik küre Şekil 2.9'da görüldüğü gibi üst üste konulmuştur. Çelik küreler arasındaki sürtünmeleri ihmal ederek A, B, C ve D noktalarındaki tepkileri bulunuz. ( $\cos 30^\circ = 0,866$  ve  $\sin 30^\circ = 0,5$ ;  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0,707$ )



Şekil 2.9: Türdeş çelik kürelerin teğet durumu

**Çözüm:** Serbest cisim diyagramlarını kullanarak tepkiler bulunur. Öncelikle üstteki kürenin serbest cisim diyagramını çizilir. Küreler türdeş ve iki kürede aynı ağırlıkta olup her biri 100 kg'dır (Şekil 2.10).



Şekil 2.10: Üstteki kürenin serbest cisim diyagramı

Şekil 2.10'da görülen serbest cisim diyagramından faydalanarak ve I. denge koşulunu kullanarak D ve A noktadaki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

$$(\uparrow +) \sum P_y = 0 \quad R_D \cdot \sin 30^\circ - 100 = 0$$

$$0,5 \cdot R_D = 100 \quad \mathbf{R_D = 200 \text{ kg}}$$

$$(\rightarrow +) \sum P_x = 0 \quad R_A - R_D \cdot \cos 30^\circ$$

$$R_A = 0,866 \cdot R_D \quad R_A = 0,866 \cdot 200$$

$$\mathbf{R_A = 173,2 \text{ kg}}$$

Şekil 2.11'de görülen serbest cisim diyagramından faydalanarak ve I. denge koşulunu kullanarak C, D ve B noktasındaki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

$$(\rightarrow +) \Sigma P_x = 0$$

$$R_D \cdot \cos 30^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$200 \times 0,866 - R_C \cdot 0,707 = 0$$

$$0,707 \cdot R_C = 173,2$$

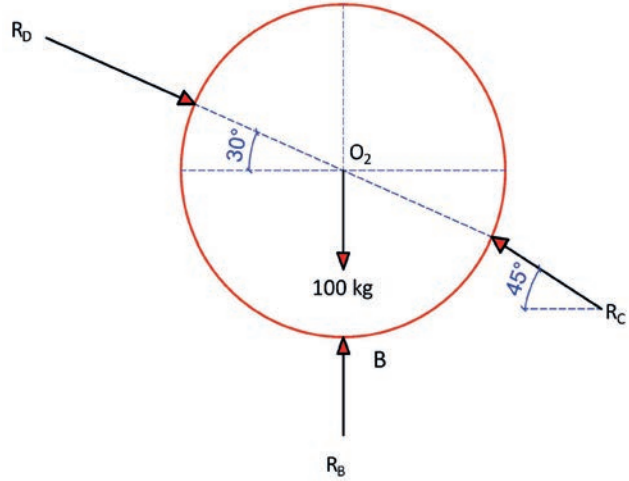
$$R_C = 244,98 \text{ kg}$$

$$(\uparrow +) \Sigma P_y = 0$$

$$-100 + R_B - R_D \cdot \sin 30^\circ + R_C \cdot \cos 45^\circ = 0$$

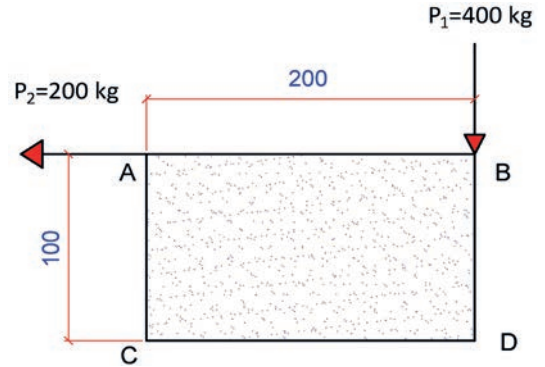
$$-100 + R_B - 200 \times 0,5 + 244,98 \times 0,707 = 0$$

$$R_B = 26,80 \text{ kg}$$



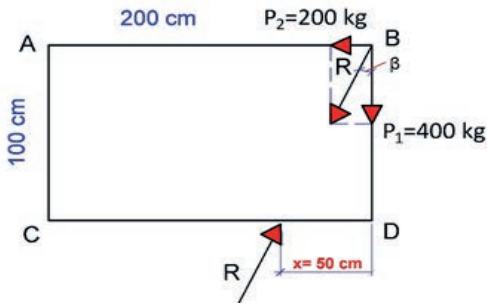
Şekil 2.11: Altta kürenin serbest cisim diyagramı

**Problem:** Şekil 2.12'de görülen dikdörtgen levha  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin etkisi altındadır. Levhanın denge- de olabilmesi için DC kenarının neresine, hangi doğ- rultu ve yönde bir kuvvet etki ettirilmesi gerekir.



Şekil 2.12: Dikdörtgen levha ve etki eden kuvvetler

**Çözüm:** Şekil 2.13'te görüldüğü gibi serbest cisim diyagramı oluşturulursa levhaya etki eden iki kuvvetin bileşkesine eşit, doğrultusu aynı, fakat yönü ters olan bir kuvvetin dengeyi sağlayacağı görülecektir.



Şekil 2.13: Dikdörtgen levha ve etkileyen kuvvetler serbest cisim diyagramı

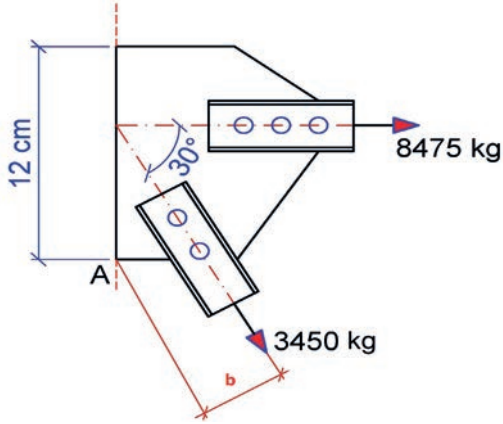
Şekil 2.13'te görülen R bileşkesi Pisagor teoremi kullanılarak bulunur.

$$R = \sqrt{400^2 + 200^2} = 447,2 \text{ kg}$$

Şekil 2.13'te görülen beta açısının tanjantı karşı dik kenarın komşu dik kenara oranı ile  $P_2$  kuvvetinin  $P_1$  kuvvetine oranının birbirlerine eşitlenmesi ile x mesafesi hesaplanır.

$$\text{tg } \beta = \frac{200}{400} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 50 \text{ cm}$$

**Problem:** Şekil 2.14'te çelik yapı elemanları düğüm noktası detayında görülen 3450 kg'lık kuvvetin A noktasına dik uzaklığı olan x mesafesini ve düğüm noktası detayındaki kuvvetlerin A noktasına göre momenti tm birimi cinsinden hesaplayınız.



Şekil 2.14: Çelik yapı elemanları düğüm noktası

**Çözüm:**

A noktasında 3450 kg'lık kuvvete uzaklığı,  
 $b_{x \text{ uzaklığı}} = 12,0 \times \sin 30^\circ = 6,0 \text{ cm}$  olur.

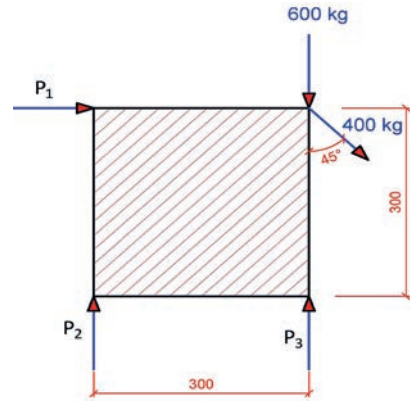
Her iki kuvvetin A noktasına göre momentlerinin toplamı;

$$(\curvearrowright +) \sum M_A = 12 \times 8475 + 6 \times 3450 = 122400 \text{ kgcm}$$

$\sum M_A = 122400 \text{ kgcm}$  bulunduğuna göre buradan da kgcm birimini tcm birimine çevirmek için 1000'e bölünür. Moment değeri 1000'e bölünürse  $\sum M_A = 122,4 \text{ tcm}$  olur.

$\sum M_A = 122,4 \text{ tcm}$  moment değeri birimi tcm, buradan da birimi tm birimine çevirmek için ise 100'e bölünür. Moment değeri 100'e bölünürse  $\sum M_A = 1,224 \text{ tm}$  olur.

**Problem:** Şekil 2.15'te görülen levhaya 600 kg ve 400 kg'lık kuvvetler etki etmektedir. Levhanın dengede olabilmesi için  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  kuvvetleri kaç kg olmalıdır.



Şekil 2.15: Kare levhayı etkileyen kuvvetler

**Çözüm:** I. ve II. denge koşulları kullanılırsa

$$(\rightarrow +) \sum P_x = 0$$

$$P_1 - 400 \times \cos 45^\circ$$

$$P_1 = 400 \times 0,707$$

$$P_1 = 282,8 \text{ kg} \text{ bulunur.}$$

$$(\curvearrowright +) \sum M = 0$$

$$300 \times 282,8 + 300 \times 600 + 300 \times 0,707 \times 400 - 300 \times P_3 = 0$$

$$84840 + 180000 + 84840 - 300P_3 = 0$$

$$349680 = 300P_3 \text{ ise } P_3 = 1165,6 \text{ kg} \text{ bulunur.}$$

$$(\uparrow +) \sum P_y = 0$$

$$P_2 + P_3 - 600 - 400 \times \sin 45^\circ = 0$$

$$P_2 + P_3 - 600 - 400 \times 0,707 = 0$$

$$P_2 + P_3 = 882,8 \text{ kg} \text{ bulunur.}$$

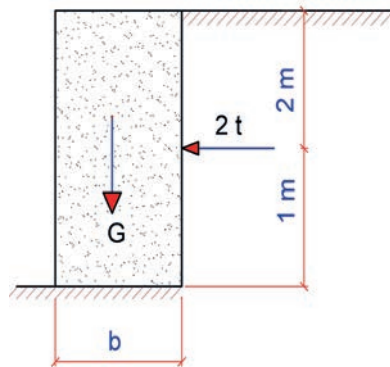
$$P_2 + P_3 = 882,8 \text{ kg} \text{ olduğundan}$$

$$P_2 + 1165,6 = 882,8 \text{ kg}$$

$$P_2 = 882,8 - 1165,6$$

$$P_2 = -282,8 \text{ kg} \text{ olur (Kuvvetin yönü değişir).}$$

**Problem:** Şekil 2.16'da verilen istinat duvarına 2 tonluk kuvvet etki etmektedir. İstinat duvarının devrilmemesi için istinat duvarının taban genişliği (b) en az ne kadar olmalıdır (istinat duvarı malzeme yoğunluğu 2,2 t/m<sup>3</sup>tür.).



Şekil 2.16: İstinat duvarı ve istinat duvarını etkileyen kuvvetler

**Çözüm:** Duvarın ağırlığı  $G = b \times 3,0 \times 2,2 = 6,6b$  olur.

Duvarı sol alt köşesi çevresinden devirmeye çalışan moment:  $M_1 = 2 \times 1,0 = 2,0$  tm bulunur.

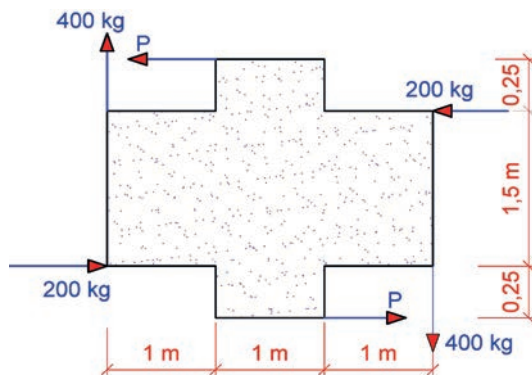
Duvarın devrilmesine engel olan moment:  $M_2 = G \times \frac{b}{2} = 6,6b \times \frac{b}{2} = 3,3b^2$

b'nin en küçük değeri ( $b_{\min}$ ) için  $M_1 = M_2$  olmalıdır.

O hâlde;  $2,0 = 3,3b^2$  olur. Eşitlikte  $b^2 = \frac{2,0}{3,3}$  olacaktır.

$b^2 = 0,606$  olur. Eşitlikte her iki tarafın karekökü alınırsa  $b_{\min} = 0,78$  m olacaktır.  $b_{\min} = 0,78$  m olması durumunda istinat duvarı devrilmez. Yani dengede olur.

**Problem:** Şekil 2.17'de verilen kuvvet çiftlerinin etkisi altında bulunan levhanın dengesi için uygulanması gereken P kuvvetlerini hesaplayınız.



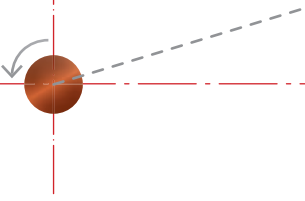
Şekil 2.17: Kuvvet çiftleri etkisi altındaki levha

**Çözüm:** Şekil 2.17'deki kuvvet çiftlerinin cebirsel toplamı hesaplanırsa

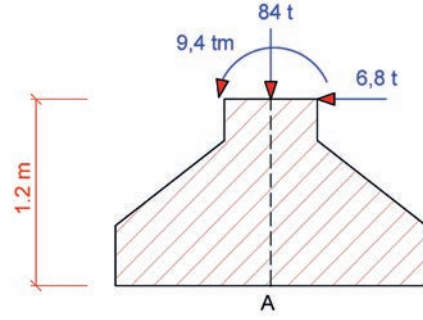
$$(\curvearrowright +) \sum M = 0$$

$400 \times 3 - 200 \times 1,5 = 900$  kgm olur. Levhanın dengede olabilmesi için aynı şiddette ancak ters yönde bir kuvvet çifti gereklidir. O hâlde

$$P = \frac{900}{2} \Rightarrow P = 450 \text{ kg bulunur.}$$



**Problem:** Şekil 2.18’de verilen tekil temele etki eden kuvvetleri ve momenti A noktasına indirgeyiniz.



Şekil 2.18: Tekil temele etkileyen kuvvetler ve moment

**Çözüm:** Tekil temeli etkileyen kuvvetleri ve momenti Şekil 2.19’daki gibi serbest cisim diyagramını ile temel tabanına indirgenir.

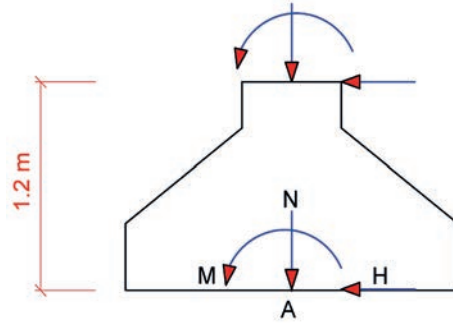
A noktasına indirgenen kuvvetlerin yatay ve düşey bileşenleri H ve N olarak, moment ise M ile gösterilirse

**H = 6,8 t** olur.

**N = 84 t** olur.

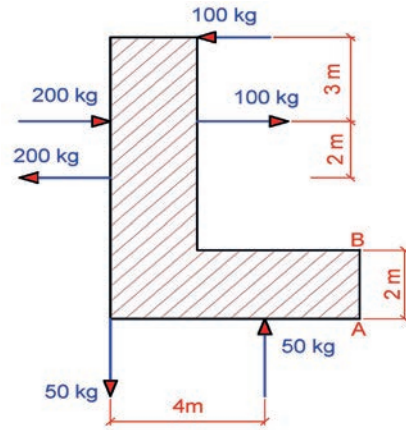
$M = 9,4 + 1,2 \times 6,8$

**M = 17,6 tm** bulunur.



Şekil 2.19: Tekil temeli etkileyen kuvvetlerin ve moment serbest cisim diyagramı

**Problem:** Şekil 2.20’de görülen L şeklindeki levhaya etki eden üç kuvvet çifti yerine eşdeğer bir kuvvet çiftini A ve B noktalarında yatay doğrultuda olacak şekilde belirleyiniz.



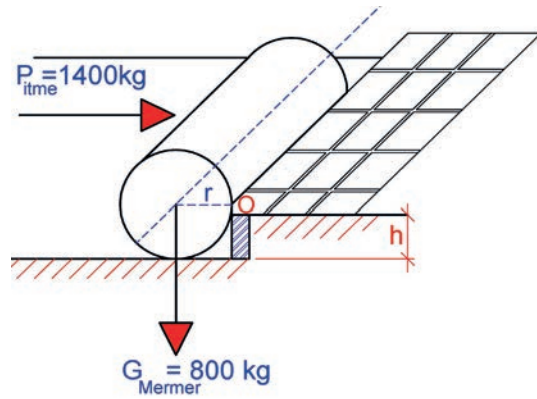
Şekil 2.20: L şeklinde levhayı etkileyen kuvvet çiftleri

**Çözüm:** Şekil 2.20’de görülen üç kuvvet çiftinin şiddetlerinin cebirsel toplamı

( +)  $\sum M = -100 \times 3,0 + 200 \times 2,0 - 50 \times 4$  buradan da  **$\sum M = -100$  kgm** olur.

Aynı şiddet ve yönde bir kuvvet çifti ise  $\frac{-100}{2} = -50$  kg olacaktır. Kuvvet çifti yatay doğrultuda A ve B noktalarında soldan sağa etki etmesi gereklidir.

**Problem:** Şekil 2.21'de ağırlığı 800 kg, yarıçapı 30 cm olan mermer silindir blok orta noktasından 1400 kg'lık itme kuvveti etkisi altındadır. İtme kuvveti uygulandığında mermer silindir bloğun çıkabileceği en fazla yüksekliği hesaplayınız.



Şekil 2.21: Mermer silindir blok ve etki eden kuvvetler

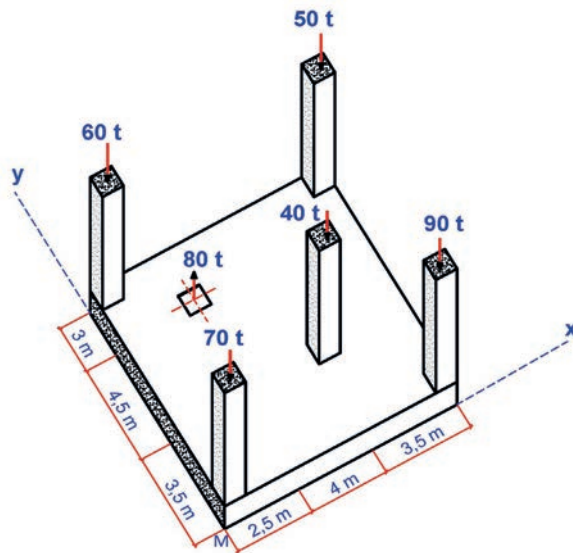
**Çözüm:**

$$(\curvearrowright +) \sum M_O = 0 \text{ olmalıdır. } P_{itme} \times (30-h) - G_{mermer} \times r = 0$$

$$1400 \times 30 - 1400h - 800 \times 30 = 0 \text{ ise } 42000 - 1400h - 24000 = 0$$

$42000 - 24000 = 140h$  olur. Buradan da  $18000 = 1400h$  ve  $h = \frac{18000}{1400}$  olur ve  $h = 12,857 \text{ cm}$  silindirin çıkabileceği en fazla yükseklik olarak bulunur.

**Problem:** Betonarme plak döşeme ve kolonlar üzerine etki eden düşey kuvvetler Şekil 2.22'de görülmektedir. Kuvvetlerin bileşkesini ve etki ettiği noktanın (x, y) koordinatlarını hesaplayınız.



Şekil 2.22: Betonarme plak döşeme ve kolon üzerine etki eden kuvvetler

**Çözüm:** Bileşke, düşey kuvvetlerin cebirsel toplamı ile bulunur.

$R = 60 + 50 + 90 + 70 + 40 - 80$  ise  $R = 230 \text{ ton}$  olur. Şekil 2.22'de görülen kuvvetlerle aynı doğrultuda olan bileşkenin betonarme plağa etki ettiği noktanın koordinatları x ve y ile ifade edilirse

$$(\curvearrowright +) \sum M_x = (90 + 50) \times 10,0 + 40 \times 6,5 - 80 \times 2,5 \text{ ise } \sum M_x = 1460 \text{ tm olur.}$$

$$(\curvearrowright +) \sum M_y = (60 + 50) \times 11,0 + 40 \times 3,5 - 80 \times 8,0 \text{ ise } \sum M_y = 710 \text{ tm olur.}$$

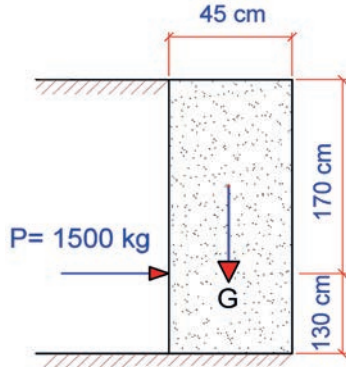
$$x = \frac{M_x}{R} \text{ ise } x = \frac{1460}{230} \text{ buradan da } x = 6,35 \text{ m}$$

bulunur.

$$y = \frac{M_y}{R} \text{ ise } y = \frac{710}{230} \text{ buradan da } y = 3,09 \text{ m}$$

bulunur.

**Problem:** Şekil 2.23'te yol kenarında meydana gelen toprak kaymalarından dolayı istinat duvarına 1500 kg'lık yük etmektedir. İstinat duvarının devrilmemesi için istinat duvarının ağırlığı kaç kg olmalıdır.



Şekil 2.23: İstinat duvarını etkileyen yatay toprak yükü

**Çözüm:**

$$(\curvearrowright +) \sum MO = 0$$

$P \times 130 - G \times 22,5 = 0$  olacaktır.  $1500 \times 130 = G \times 22,5$  olduğundan eşitlikte G çekilirse

$$G = \frac{1500 \times 130}{22,5} \text{ olur. Buradan da } \mathbf{G = 8666,67 \text{ kg}} \text{ bulunur.}$$



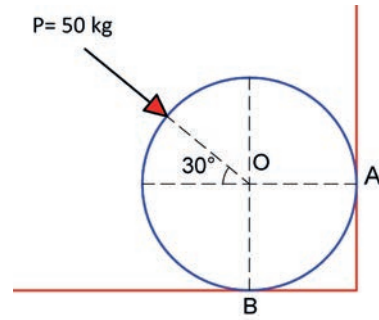
### BİLGİ KUTUSU

Denge hesaplarında I. ve II. denge koşulları titiz bir şekilde incelenmeli ve problem çözümlerinde dikkatli olunmalıdır. Hesaplamalar tamamlandıktan sonra kontroller yapılmalıdır.



### SIRA SİZDE

O Merkezli türdeş küreye Şekil 2.24'te görüldüğü gibi 50 kg'lık kuvvet etki etmektedir. P kuvvetinin O merkezli türdeş küreye yaptığı açı  $30^\circ$  ve sistem dengededir. Türdeş küreye B noktasındaki tepki kuvveti 60 kg ise kürenin ağırlığını (G) ve A noktasındaki tepki kuvvetini ( $P_A$ ) hesaplayınız?



Şekil 2.24: O merkezli türdeş küre ve etkileyen kuvvet

## 2.2. UYGULAMA DENGE HESAPLARI

10 DERS SAATİ

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



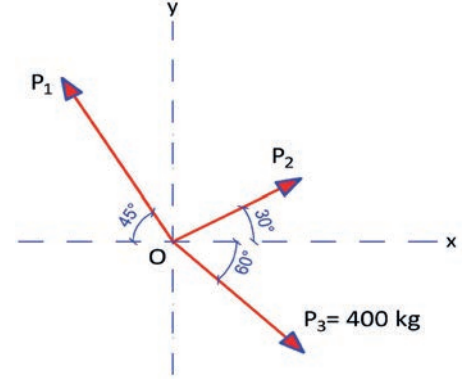
36144

Bu çalışmanın amacı, denge hesapları ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

Denge hesapları uygulamasını, işlem basamaklarına göre öğretmenin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 2.25'te verilen kuvvetler O noktasında kesişmektedir. Kuvvetlerin dengede olabilmesi için  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin değerini hesaplayınız.



Şekil 2.25: O noktasında kesişen kuvvetler

### Yönerge

- Çalışmanızda kuvvetlerin eksenler ile yaptıkları açılara dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde net olarak görebilirsiniz.

### İşlem Basamakları

- Şekil 2.26'da verilen kuvvetlerin yatay (x) ve düşey (y) eksenlerine göre bileşenleri izdüşüm yöntemiyle gösterilir.
- x eksenindeki kuvvetlerin bileşenleri izdüşüm yöntemiyle bulunur.

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos 45^\circ \text{ ise } P_{1x} = P_1 \cdot 0,707 = 0,707P_1$$

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 30^\circ \text{ ise } P_{2x} = 300 \times 0,866 = 0,866P_2 \text{ kg}$$

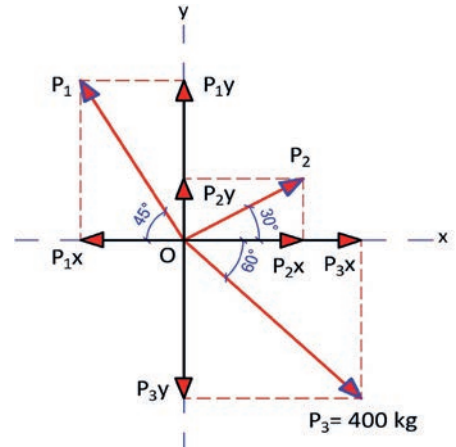
$$P_{3x} = P_3 \cdot \cos 60^\circ \text{ ise } P_{3x} = 400 \times 0,5 = 200 \text{ kg}$$

- y eksenindeki kuvvetlerin bileşenleri izdüşüm yöntemiyle bulunur.

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin 45^\circ \text{ ise } P_{1y} = P_1 \cdot 0,707 = 0,707P_1$$

$$P_{2y} = P_2 \cdot \sin 30^\circ \text{ ise } P_{2y} = P_2 \times 0,5 = 0,5P_2 \text{ kg}$$

$$P_{3y} = P_3 \cdot \sin 60^\circ \text{ ise } P_{3y} = 400 \times 0,866 = 346,4 \text{ kg}$$



Şekil 2.26: O noktasında kesişen kuvvetlerin bileşenleri



- x ve y eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamlarını ve yatay kuvvetlerin dengede olabilmesi için denge koşulu ile  $\sum P_x$  ve  $\sum P_y$  bileşke kuvvet değerleri hesaplanır.

Soldan sağa kuvvetleri (+) ve aşağıdan yukarı yönlü kuvvetleri (+) kabulü;

$$( \rightarrow + ) \sum P_x = 0 \quad \sum P_x = 0, -0,707P_1 + 0,866P_2 + 200 = 0 \text{ olur. } \mathbf{200 = 0,866P_2 - 0,707P_1 \text{ (1. denklem)}}$$

$$( \uparrow + ) \sum P_y = 0 \quad \sum P_y = 0, -0,707P_1 + 0,5P_2 + 364,4 = 0 \text{ olur. } \mathbf{364,4 = 0,5P_2 - 0,707P_1 \text{ (2. denklem)}}$$

- $\sum P_x$  ve  $\sum P_y$  bileşke kuvvetlerin cebirsel toplamları ile bulunan birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin çözümü yapılır.

1. denklemde eşitliğin her iki tarafındaki değerleri (-1) ile çarparak denklemlerdeki bilinmeyen sayısı bire düşürülür.

$$-1 / 0,866P_2 - 0,707P_1 = 200$$

$$0,5P_2 - 0,707P_1 = 364,4$$

$$-0,866P_2 + 0,5P_2 = 164,4 \text{ ise } 0,366P_2 = 164,4 \text{ olur. } P_2 = \frac{164,4}{0,366} \text{ buradan da } \mathbf{P_2 = 449,18 \text{ kg}} \text{ olur.}$$

$$1. \text{ denklemde } P_2 \text{ değeri yerine konursa } 0,866 \times 449,18 - 0,707P_1 = 200 \text{ ise } 388,99 - 0,707P_1 = 200$$

$$\text{buradan da } 0,707P_1 = -188,99 \text{ olur. } P_1 = \frac{-188,99}{0,707} \text{ buradan da } \mathbf{P_1 = -267,313 \text{ kg}} \text{ olur.}$$

### UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için "Evet", kazanamadığınız beceriler için "Hayır" kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	Şekil 2.23'te verilen kuvvetlerin yatay (x) ve dikey (y) eksenlerine göre bileşenlerini izdüşüm yöntemiyle gösterdiniz mi?		
2	x eksenindeki kuvvetlerin bileşenlerini izdüşüm yöntemiyle buldunuz mu?		
3	x ve y eksenindeki kuvvetlerin cebirsel toplamlarını ve yatay kuvvetlerin dengede olabilmesi denge koşulu ile $\sum P_x$ ve $\sum P_y$ bileşke kuvvet değerlerini hesapladınız mı?		
4	$\sum P_x$ ve $\sum P_y$ cebirsel toplamları ile bulunan denklemlerin çözümünü yaptınız mı?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

DEĞERLENDİRME					
Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	30	60	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:		Tarih
					..... / ..... / .....
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		



### HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

Çevrenizde yapı elemanlarını ve cisimleri etkileyen kuvvetlerin döndürücü etkilerinin oluşumunu araştırınız ve arkadaşlarınızla paylaşınız.

## 2.3. MOMENT HESAPLARI

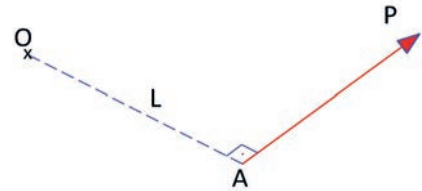
Denge şartlarının II. koşulu olan moment, kuvvetlerin döndürücü etkilerinin şiddetleri toplamıdır. Kuvvetlerin döndürücü etkisi hesaplanırken kuvvetlerin soldan sağa saat yönü ve sağdan sola saatin tersi yönü dikkate alınarak hesaplanır. Bunun için bir kabul yapılması gerekmektedir. Örneğin moment alınan noktaya göre soldan sağa saat yönünde olan kuvvetler pozitif (+) ve sağdan sola saat yönünün tersi olan kuvvetler negatif (-) kabul edilerek kuvvetlerin döndürücü etkilerinin cebirsel toplamları ile moment değeri hesaplanabilir. Ya da bu durumun tersi kabul ile de moment değeri hesaplanabilir.

Kuvvet etkisi altında bulunan bir nokta ile kuvvet arasındaki uzaklığa **kuvvet kolu** denir. Kuvvet ile kuvvet kolunun çarpımına **kuvvetin döndürücü etkisi** ya da **statik moment** denir. Statik Moment **M** harfi ile gösterilir. Momentin birimi; kgm (kilogrammetre), kgcm (kilogramsantimetre), tm (tonmetre), tcm (tonsantimetre), Nm (Newtonmetre), Ncm (Newtonsantimetre), kgmm (kilogrammilimetre) vb. olabilir.

### 2.3.1. Noktaya Göre Moment

Bir P kuvvetinin başlangıç noktası A harfi ile P kuvvetin başlangıç noktasından momenti alınacak noktaya olan uzaklığa L ile ifade edilirse (Şekil 2.27); P kuvveti ile L uzaklığının çarpımı, noktaya göre momenti verir.

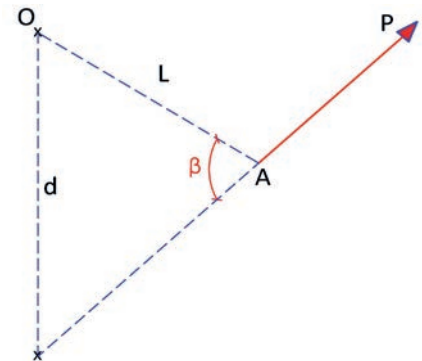
Dik uzunlukta noktaya göre Moment,  
**M = P.L** ile hesaplanır.



Şekil 2.27: Dik uzunlukta noktaya göre moment

O noktası ile P kuvveti arasındaki açı  $\beta$  ile gösterilirse P kuvvetinin O noktasına göre momentinin şiddeti Şekil 2.28'den faydalanılarak

**M<sub>O</sub> = P.L.Sin $\beta$**  ya da **M<sub>O</sub> = P.d** bağıntılarıyla hesaplanır.



Şekil 2.28: Açısal (eğik) uzaklıkta noktaya göre moment

## 2.3.2. Eksene Göre Moment

Bir eksen üzerinde bulunan A birim vektörü ve P kuvvetine göre eksendeki momentin şiddeti Şekil 2.29'dan faydalanılarak

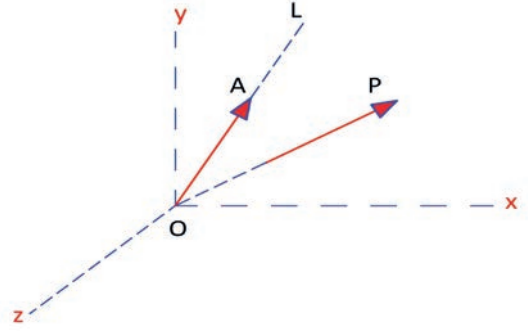
$M_{OL} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_O$  veya  $M_{OL} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{l} \wedge \mathbf{P})$  bağıntılarıyla hesaplanır.

Şekil 2.29'da görülen eksene göre momenti x, y ve z eksenlerine göre determinantı alınarak bulunur.

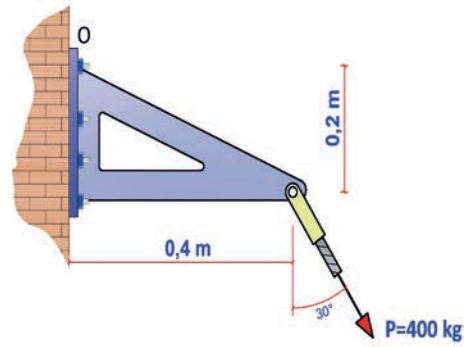
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$A_x, A_y, A_z$  değerleri OL eksenlerinin doğrultan cosinüsleridir.

**Problem:** Şekil 2.30'da ankastre destek sisteminde 400 kg'lık kuvvet desteğin köşesinden etki etmektedir. Vektörel kuvvetin O noktasına göre momentini belirleyiniz.



Şekil 2.29: Eksene göre moment



Şekil 2.30: Ankastre destek ve P kuvveti

**Çözüm:** Kuvvetin yatay ve düşey izdüşümleri Şekil 2.31'deki gibi gösterilir.

Şekil 2.31'den kuvvetlerin değerleri hesaplanır.

$$P_x = 400 \cdot \sin 30^\circ = 200 \text{ kg (Kuvvet soldan sağa yönlü)}$$

$$P_y = -400 \cdot \cos 30^\circ = -364,4 \text{ kg (Kuvvet aşağı yönlü)}$$

$$P_z = 0$$

Kuvvetin O noktasına olan uzaklıkları yazılır.

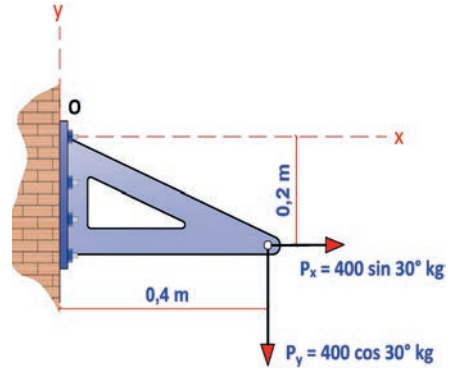
$$r_x = 0,4 \text{ m}$$

$$r_y = 0,2 \text{ m}$$

$$r_z = 0 \text{ m}$$

$$\mathbf{r} = (0,4x - 0,2y + 0z)$$

$$\mathbf{P} = (200x - 364,4y + 0z)$$



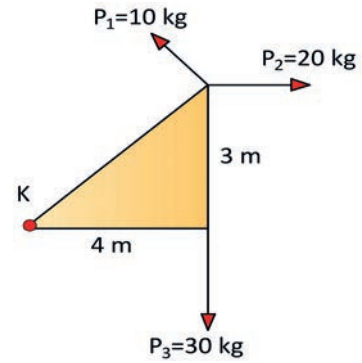
Şekil 2.31: Ankastre destek ve x, y, z eksenlerine göre P kuvveti bileşenleri

$M_O = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}$  bağıntısını kullanarak O noktasına göre x, y ve z eksenleri doğrultusunda  $M_O$  değerini determinantı alarak hesaplanması. Determinantta x, y ve z birim vektör olarak alınır.

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0,4 & -0,2 & 0 \\ 200,0 & -364,4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot x - 0 \cdot y + [0,4 \cdot (-364,4) - (-0,2) \cdot (200,0)]z$$

$M_{OL} = -98,6z \text{ kgm}$  bulunur.

**Problem:** Şekil 2.32'de görülen üçgen bir blok  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  kuvvetlerinin etkisi altındadır. Kuvvetler K noktasına dik olarak etki etmektedir. K noktasında geçen, levhaya dik eksene göre verilen kuvvetlerin bileşke momentinin büyüklüğünü hesaplayınız.



Şekil 2.32: Üçgen blok ve onu etkileyen kuvvetler

**Çözüm:** Şekil 2.32'de görülen üçgen blok dik üçgen şeklinde olduğundan bilinmeyen hipotenüs boyu Pisagor Teoremi ile hesaplanır.

Dik üçgende **Pisagor Teoremi**  $a^2 = b^2 + c^2$

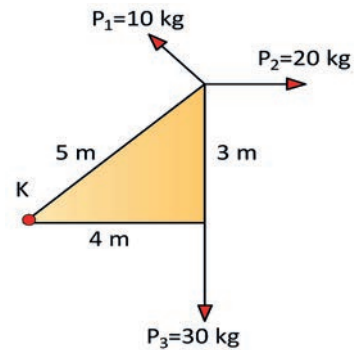
Şekil 2.32'deki üçgen blokta, b = karşı dik kenar = 3 m, c = komşu dik kenar = 4 m, a = hipotenüs olur.

$a^2 = 3^2 + 4^2$  olur.  $a^2 = 9 + 16$  ve  $a^2 = 25$  olacaktır.

Buradan da; **a = 5 m** bulunur (Şekil 2.33).

( +) K noktasına göre moment alınırsa

$$\begin{aligned} M_K &= -P_1 \times 5 + P_2 \times 3 + P_3 \times 4 \\ M_K &= -10 \times 5 + 20 \times 3 + 30 \times 4 \\ M_K &= -50 + 60 + 120 \\ \mathbf{M_K} &= \mathbf{130 \text{ kgm}} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



Şekil 2.33: Üçgen bloğu etkileyen kuvvetler ve hipotenüs boyu

**Problem:** Şekil 2.34'te dikdörtgen bir blok, P kuvvetinin etkisi altındadır. Bloğun A noktasına göre momentini hesaplayınız.

**Çözüm:** Kuvvetin yatay ve düşey bileşenlerini izdüşüm yöntemiyle gösterimi Şekil 2.35'te verilmiştir.

Şekil 2.35'ten faydalanarak kuvvetin yatay ve düşey izdüşümleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} P_y &= P \cdot \sin \alpha & P_x &= P \cdot \cos \alpha \\ P_y &= 10 \cdot \sin 60^\circ & P_x &= 10 \cdot \cos 60^\circ \\ P_y &= 10 \times 0,866 \Rightarrow \mathbf{P_y = 8,66 \text{ kg}} \text{ olur.} & P_x &= 10 \times 0,5 \Rightarrow \mathbf{P_x = 5 \text{ kg}} \text{ olur.} \end{aligned}$$

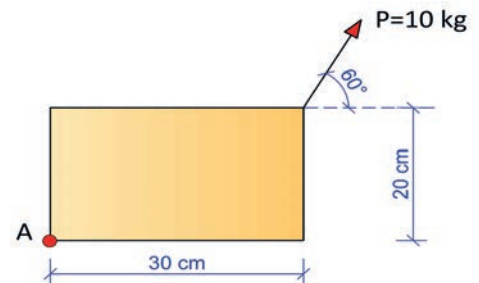
( +) A noktasına göre moment alınırsa;

$$M_A = -P_y \cdot 30 + P_x \cdot 20$$

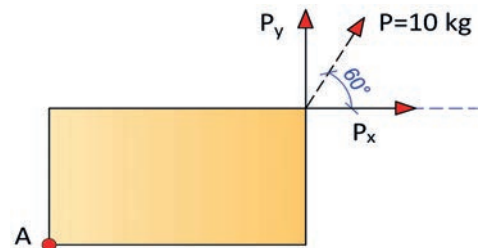
$$M_A = -8,66 \times 30 + 5 \times 20$$

$$\Rightarrow M_A = -259,8 + 100$$

$$\Rightarrow \mathbf{M_A = -159,8 \text{ kgcm}} \text{ olur.}$$



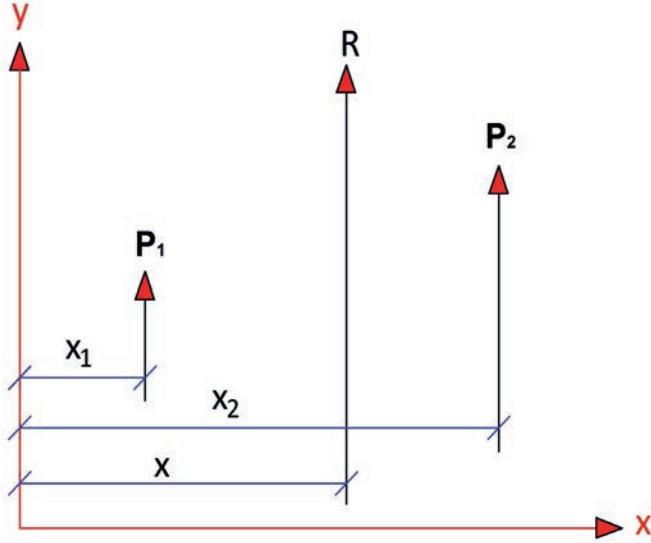
Şekil 2.34: Dikdörtgen blok ve etkiyen kuvvet



Şekil 2.35: Dikdörtgen blok ve etkiyen kuvvetin bileşenleri

### 2.3.3. Paralel Kuvvetlerde Bileşke ve Yerinin Bulunması

$P_1$ ,  $P_2$  ve bu kuvvetlerin bileşkesi olan  $R$ , birbirine paralel konumda  $x$  ve  $y$  eksenlerine olan uzaklıkları Şekil 2.36'da gösterilmiştir.



Şekil 2.36: Paralel kuvvetlerin bileşkesi ve yeri

Kuvvetlerin  $x$  bileşenleri olmadığına göre

$$\sum P_y = R = P_1 + P_2 \text{ olmalıdır.}$$

Kuvvetlerin o noktasına göre momentleri

$$M_o = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 \text{ olur.}$$

Bileşke kuvvetin aynı noktaya göre momenti ise  $R \cdot x = (P_1 + P_2) \cdot x$  şeklinde yazılır.

Bileşke kuvvetin momenti bileşenlerin momentleri toplamına eşit olduğundan

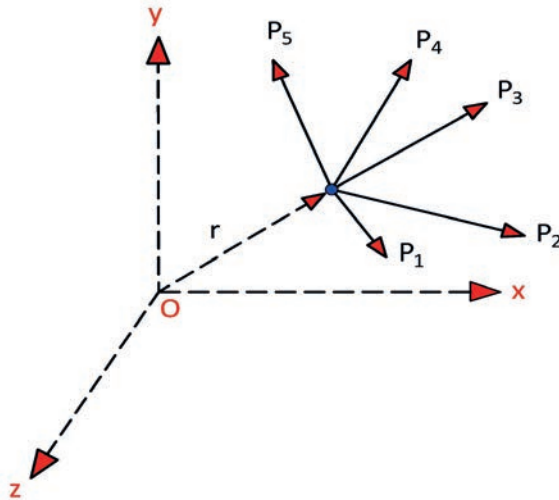
$$(P_1 + P_2) \cdot x = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 \text{ olacaktır.}$$

$$\text{Buradan da; } \mathbf{x} = \frac{(P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2)}{(P_1 + P_2)}$$

### 2.3.4. Varignon Teoremi

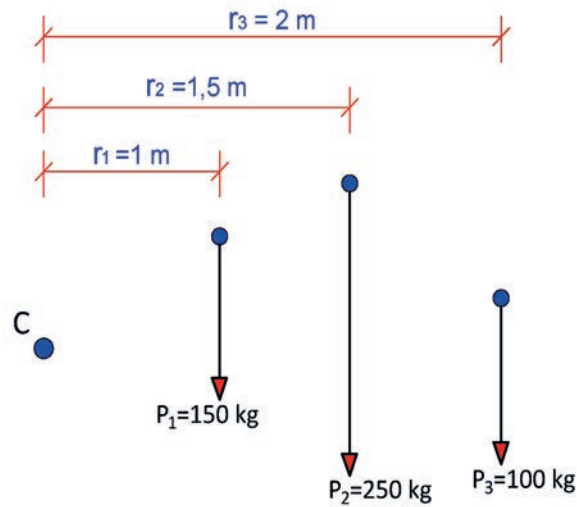
Bir noktada kesişen birden çok kuvvetin bileşkesinin bir dönme merkezine göre momenti, aynı noktaya göre momentlerinin cebirsel toplamına eşittir. Bir paralel kuvvetler sistemi bileşkesinin herhangi bir dönme merkezine göre momenti aynı noktaya göre bileşenler momentlerinin cebirsel toplamına eşittir (Şekil 2.37).

Aynı noktaya uygulanan  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  gibi kuvvetlerin etkisi ile ve noktanın yer vektörü  $r$  ise  $r \cdot P_1 + r \cdot P_2 + r \cdot P_3 + \dots + r \cdot P_n = r \cdot (P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n)$  şeklinde ifade edilir.



Şekil 2.37: Kesişen kuvvetlerin Varignon Teoremi ile momenti

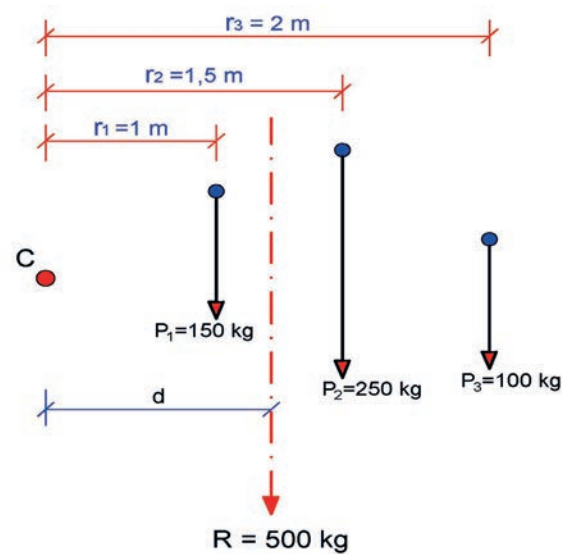
**Problem:** Şekil 2.38'de görülen kuvvetlerin C merkezine olan uzaklıkları verilmiştir. Verilenlere göre kuvvetlerin bileşkesini (R) ve bileşkenin C merkezine olan uzaklığını bulunuz.



Şekil 2.38: C merkezine uzaklıkları verilen kuvvetler

**Çözüm:**

Bileşke;  $R = P_1 + P_2 + P_3 \Rightarrow R = 150 + 250 + 100$  ve **R = 500 kg** bulunur.



Şekil 2.39: C merkezine uzaklıkları verilen kuvvetlerin bileşkesi

C noktasına göre moment alınırsa

$$(\curvearrowright +) \sum M_C = 0, P_1 \cdot r_1 + R \cdot d + P_2 \cdot r_2 + P_3 \cdot r_3 = 0 \text{ ise}$$

$$+R \cdot d = P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2 + P_3 \cdot r_3 \text{ bağıntısından;}$$

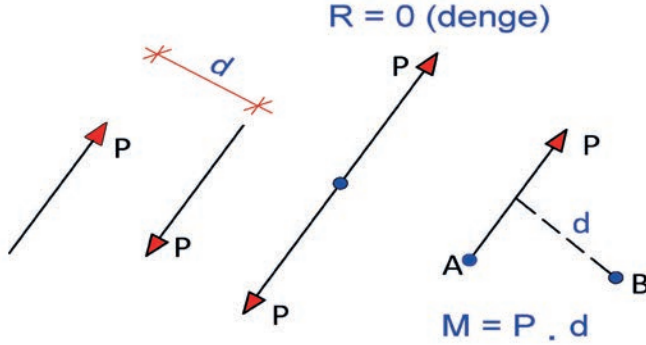
$$500x d = 150 \times 1 + 250 \times 1,5 + 100 \times 2 = 150 + 375 + 200 \Rightarrow d = 725 / 500 \text{ ise } \mathbf{d = 1,45 m}$$
 bulunur (Şekil 2.39).

## 2.3.5. Kuvvet Çifti ve Kuvvet Çiftinin Momenti

Ters yönde eşit şiddette paralel olan kuvvetlere **kuvvet çifti** veya **eşlenik kuvvetler** adı verilir.

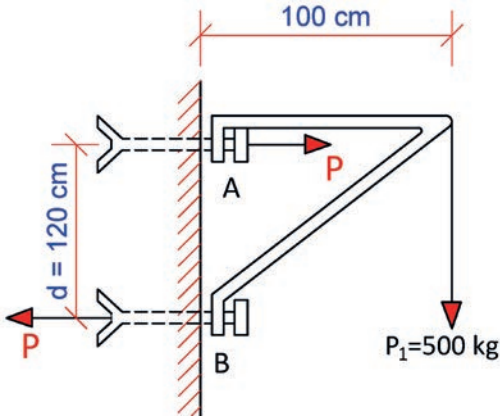
Kuvvet çiftinin momenti, dönme merkezinin her durumu için kuvvetlerden biri ile kuvvetler arasındaki uzaklığın çarpımına eşittir.

Dönme yönleri aynı olmak kaydıyla, bir kuvvet çifti yerine başka bir kuvvet çifti konabilir. Bileşke kuvvet çiftinin şiddeti bileşen kuvvet çiftlerinin cebirsel toplamına eşittir. Bileşke kuvvetin 0 (sıfır) olması denge durumunu gösterir (Şekil 2.40).



Şekil 2.40: Kuvvet çifti ve momentini

**Problem:** Şekil 2.41’de görülen ankastre konsol A ve B noktalarında duvara bulonla monte edilmiştir. Konsolu etkileyen yükün A veya B ankrajlanmış noktalara göre momentin oluşturacağı kuvvet çiftinin A veya B ankraj noktalarındaki etkisini bulunuz.



Şekil 2.41: Ankastre konsol ve kuvvet çifti

**Çözüm:**



$$M_A = 500 \times 100$$

$$M_A = 50000 \text{ kgcm bulunur.}$$



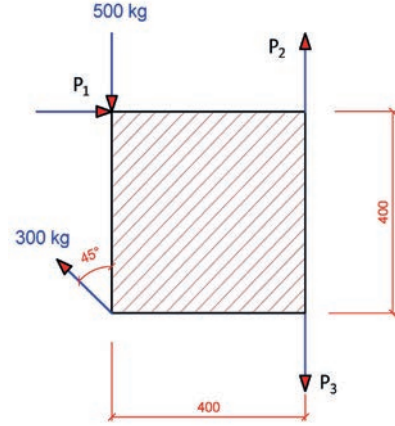
### BİLGİ KUTUSU

Moment hesaplarında, moment alınan nokta ile kuvvetler arasındaki uzunluk doğru alınmalıdır. Kuvvetin döndürücü etkisi (moment), saat yönüne göre ve saatin tersi yönünde etkisi olan kuvvetlerin durumu titiz bir şekilde incelenmeli ve problem çözümlerinde dikkatli olunmalıdır. Hesaplamalar yapıldıktan sonra hassas bir şekilde kontrol yapılmalıdır.



## SIRA SİZDE

Şekil 2.42'de verilen kare levha 300 kg ve 500 kg'lık kuvvetlerin etkisi altındadır. Levhanın dengede olabilmesi için  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  kuvvetlerinin değeri kaç kg olmalıdır?



Şekil 2.42: Kare levha ve onu etkileyen kuvvetler

## 2.4. UYGULAMA MOMENT HESAPLARI

6 DERS SAATI

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



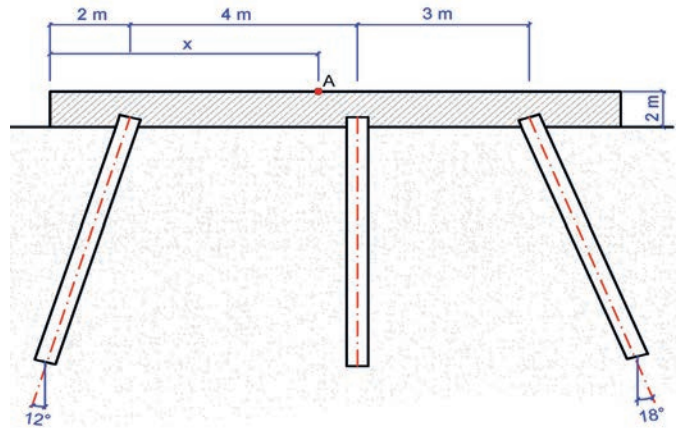
36145

Bu çalışmanın amacı, moment hesapları ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

Moment hesapları uygulamasını, işlem basamaklarına göre öğretmenin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 2.43'te üç adet fore kazık ve betonarme başlık plağından oluşan temel sisteminde fore kazıkların her biri kendi doğrultusunda 100 ton yük taşımaktadır. Bileşke yükün başlık plağını kestiği A noktasına olan mesafesini ( $x$ ) ve bileşke kuvvetin şiddetini hesaplayınız.



Şekil 2.43: Fore kazık ve betonarme plak başlığından oluşan temel sistemi

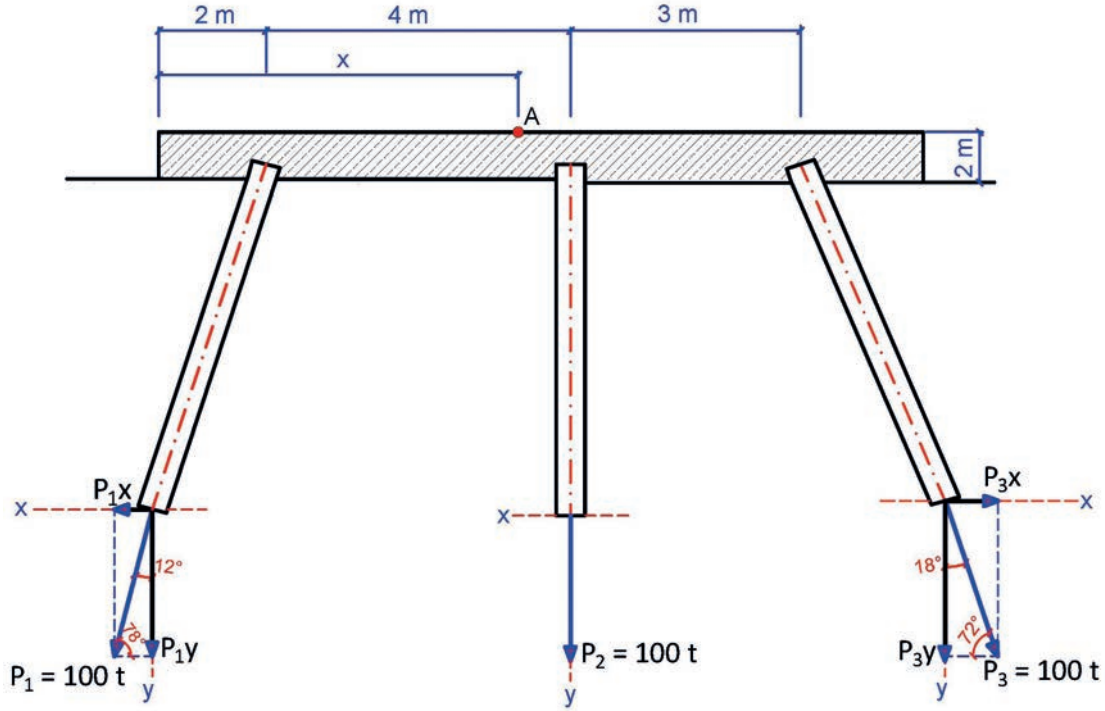
### Yönerge

- Çalışmanızda Şekil 2.43'te verilen betonarme plak ve fore kazık sisteminde açılara dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde net olarak görebilirsiniz.



## İşlem Basamakları

- Zemine aktarılan yükler ve doğrultuları gösterilir (Şekil 2.44).
- Yüklerin x ve y eksenlerine olan izdüşümleri çizilir (Şekil 2.44).



Şekil 2.44: Fore kazıkların aktardığı yüklerin izdüşümleri

- $P_1$  ve  $P_3$  kuvvetlerinin yatay eksen üzerindeki izdüşümleri hesaplanır.

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos 78^\circ \text{ olduğundan } P_{1x} = 100 \times 0,2079 = 20,79 \text{ t}$$

$$P_{3x} = P_3 \cdot \cos 72^\circ \text{ olduğundan } P_{3x} = 100 \times 0,3090 = 30,90 \text{ t}$$

- $P_1$  ve  $P_3$  kuvvetlerinin düşey eksen üzerindeki izdüşümleri hesaplanır.

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin 78^\circ \text{ olduğundan } P_{1y} = 100 \times 0,9781 = 97,81 \text{ t}$$

$$P_{3y} = P_3 \cdot \sin 72^\circ \text{ olduğundan } P_{3y} = 100 \times 0,9511 = 95,11 \text{ t}$$

- Yatay kuvvetlerin cebirsel toplamı alınarak  $\Sigma P_x$  hesaplanır.

$$(\rightarrow +) \Sigma P_x = 0$$

$$\Sigma P_x = - P_{1x} + P_{3x} = - 20,79 + 30,90 \text{ ise } \Sigma P_x = \mathbf{10,11 \text{ t}} \text{ bulunur.}$$

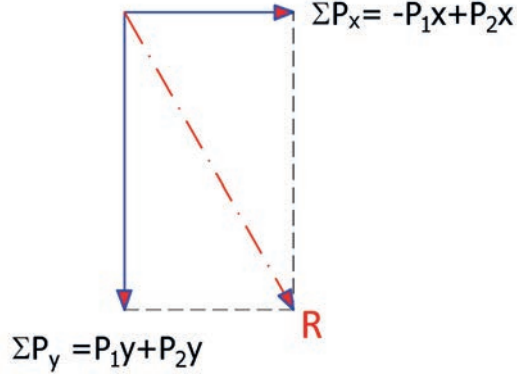


- Düşey kuvvetlerin cebirsel toplamı alınarak  $\Sigma P_y$  hesaplanır.

$$(\uparrow +) \Sigma P_y = 0$$

$$\Sigma P_y = P_1y + P_2 + P_3y = 97,81 + 100 + 95,11 \Rightarrow \Sigma P_y = 292,92 \text{ t bulunur.}$$

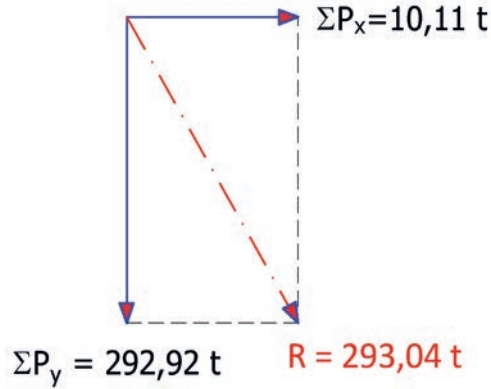
- Yatay kuvvetlerin cebirsel toplamı ile düşey kuvvetlerin cebirsel toplamı gösterilir ve bileşke kuvvet hesaplanır (Şekil 2.45).



Şekil 2.45: Fore kazıkların aktardığı yüklerin bileşkesi

$$R^2 = (\Sigma P_x)^2 + (\Sigma P_y)^2 \text{ ise } R^2 = (10,11)^2 + (292,92)^2 = 102,2121 + 85802,1264 \text{ ise } R^2 = 85904,34$$

$$R = 293,094 \text{ t bulunur (Şekil 2.46).}$$



Şekil 2.46: Fore kazıkların aktardığı yüklerin bileşkesi

- Şekil 2.44'te betonarme plağın **sol üst köşe noktasına göre** moment alınarak kuvvetlerin plağı kestiği mesafe (x) hesaplanır.

$$(\curvearrowright +) \Sigma M = 0$$

$$P_1x \cdot 2 + P_1y \cdot 2 + P_2 \cdot 6 + P_3y \cdot 9 - P_3x \cdot 2 = R \cdot x$$

$$20,79 \times 2 + 97,81 \times 2 + 100 \times 6 + 95,11 \times 9 - 30,90 \times 2 = 293,04 \cdot x$$

$$41,58 + 195,62 + 600 + 855,9 - 61,80 = 293,04x$$

$$1631,3 = 293,04x \text{ ise } x = 5,57 \text{ m bulunur.}$$



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için "Evet", kazanamadığınız beceriler için "Hayır" kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

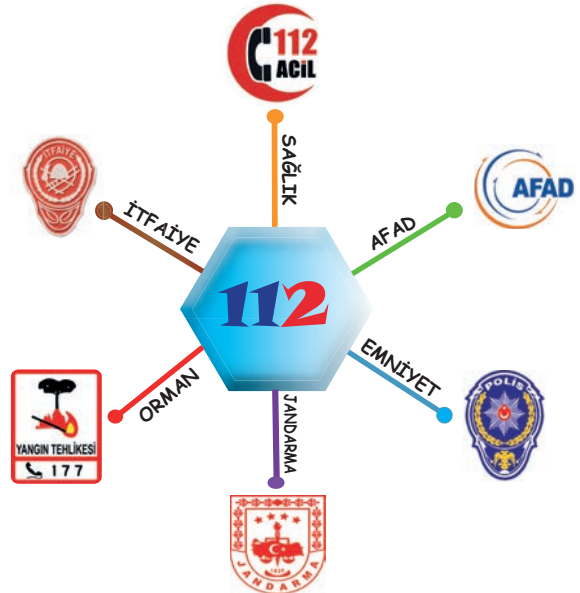
ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	Zemine aktarılan yükleri ve doğrultularını gösterdiniz mi?		
2	Yüklerin x ve y eksenlerine olan izdüşümlerini çizdiniz mi?		
3	$P_1$ ve $P_3$ kuvvetlerinin yatay eksen üzerindeki izdüşümlerini hesapladınız mı?		
4	$P_1$ ve $P_3$ kuvvetlerinin düşey eksen üzerindeki izdüşümlerini hesapladınız mı?		
5	Yatay kuvvetlerin cebirsel toplamını alarak $\sum Px$ değerini hesapladınız mı?		
6	Düşey kuvvetlerin cebirsel toplamını alarak $\sum Py$ değerini hesapladınız mı?		
7	Yatay kuvvetlerin cebirsel toplamı ile düşey kuvvetlerin cebirsel toplamını gösterip, bileşke kuvveti hesapladınız mı?		
8	Plağın sol üst noktasına göre moment alarak kuvvetlerin plağı kestiği mesafeyi (x) hesapladınız mı?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

## DEĞERLENDİRME

Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	25	65	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:	Tarih	
				..... / ..... / .....	
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		

**110 - 112 - 122 - 155 - 156 - 177**  
**TEK NUMARADA BİRLEŞTİ!**



## 2.5. UYGULAMA

# DENGE VE MOMENT HESAPLARI

1 DERS SAATİ

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



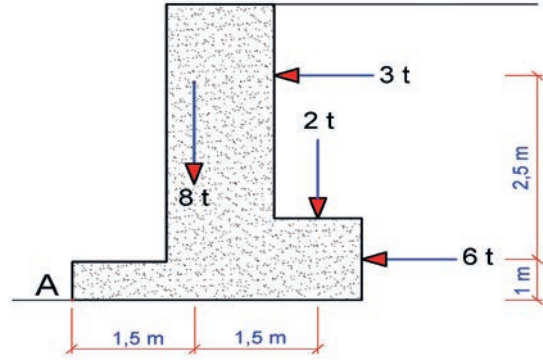
36146

Bu çalışmanın amacı, denge ve moment hesapları ile ilgili uygulama yapmaktır.

### Görev

Denge ve moment hesap uygulamalarını, işlem basamaklarına göre öğretmeninizin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 2.47’de ağırlığı 8 ton olan bir istinat duvarını A noktası etrafında devirmeye çalışan moment ile devrilmeye karşı koyan momenti karşılaştırınız.



Şekil 2.47: Papuçlu İstinat duvarı

### Yönerge

- Çalışmanızda istinat duvarını devirmeye çalışan ve devrilmeye karşı koyan kuvvetleri doğru almaya dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde net olarak görebilirsiniz.

### İşlem Basamakları

- Şekil 2.47’deki istinat duvarını devirmeye çalışan kuvvetler ile devrilmeye karşı koyan kuvvetler tespit edilir.
- İstinat duvarında devrilmeye karşı koyan kuvvetlerin A noktasına göre momentlerinin cebirsel toplamı bulunur.
- İstinat duvarını devirmeye çalışan kuvvetlerin A noktasına göre momentlerinin cebirsel toplamı bulunur.
- İstinat duvarını devirmeye çalışan kuvvetlerin momentlerinin cebirsel toplamı ile devrilmeye karşı koyan kuvvetlerin momentlerinin büyüklükleri karşılaştırılarak istinat duvarının devrilme tahkiki yapılır.
- İstinat duvarında devrilmeye karşı koyan momentlerin cebirsel toplamı ile devirmeye çalışan momentlerin cebirsel toplamı oranlanarak emniyet katsayısı tespit edilir.



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için “Evet”, kazanamadığınız beceriler için “Hayır” kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	İstinat duvarını devirmeye çalışan kuvvetler ile devrilmeye karşı koyan kuvvetleri tespit ettiniz mi?		
2	İstinat duvarında devrilmeye karşı koyan kuvvetlerin A noktasına göre momentlerinin cebirsel toplamını buldunuz mu?		
3	İstinat duvarını devirmeye çalışan kuvvetlerin A noktasına göre momentlerinin cebirsel toplamını buldunuz mu?		
4	İstinat duvarını devirmeye çalışan kuvvetlerin momentlerinin cebirsel toplamı ile devrilmeye karşı koyan kuvvetlerin momentlerinin cebirsel toplamının büyüklüklerini karşılaştırıp istinat duvarının devrilme tahkikini yaptınız mı?		
5	İstinat duvarında devrilmeye karşı koyan momentlerin cebirsel toplamı ile devirmeye çalışan momentlerin cebirsel toplamını oranlayıp emniyet katsayısını tespit ettiniz mi?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

DEĞERLENDİRME					
Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	25	65	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:		Tarih
					..... / ..... / .....
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		

## 2. ÖĞRENME BİRİMİ NOTLARIM

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Aşağıda verilen çoktan seçmeli test maddelerinden oluşan soruları cevaplayınız.

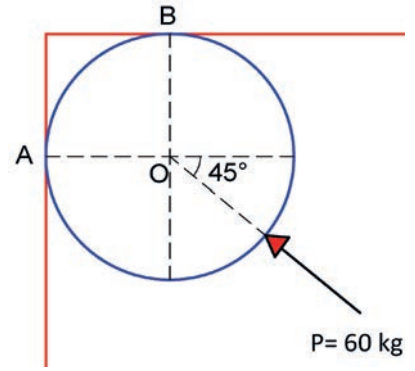
1. Bir sistemde bilinmeyen sayısı üçten fazla ise sadece 3 denklemi kullanarak çözüm mümkün değildir ve yapı statik olarak belirsizdir. Bu durum .....olarak adlandırılır.

Yukarıda noktalı boşluk bırakılan yere aşağıdaki seçeneklerde verilenlerden hangisi gelmelidir?

- A) Hidrolik sistemler B) İzostatik sistemler C) Hiperstatik sistemler  
D) Dengeli sistemler E) Dinamik sistemler

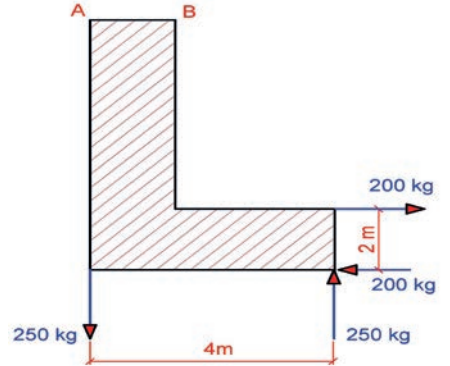
2. O Merkezli türdeş küreye şekilde görüldüğü gibi 60 kg'lık kuvvet etki etmektedir. P kuvvetinin O merkezli türdeş küreye yaptığı açı  $45^\circ$  ve sistem dengededir. Türdeş küreye B noktasında 20 kg'lık tepki kuvveti etki ettiğine göre kürenin ağırlığı (G) kaç kg olmalıdır?

- A) 20,22  
B) 22,42  
C) 32,22  
D) 42,42  
E) 40,22



3. Şekildeki levhaya etki eden iki kuvvet çifti yerine eşdeğer bir kuvvet çifti A ve B noktalarında düşey doğrultuda kaç kg olmalıdır?

- A) 195,66  
B) 175,17  
C) 165,48  
D) 210,79  
E) 118,77



4. Aşağıdaki seçeneklerin hangisinde verilen moment birimi olamaz?

- A) Nm B) kgm C) kgN D) tcm E) Ncm

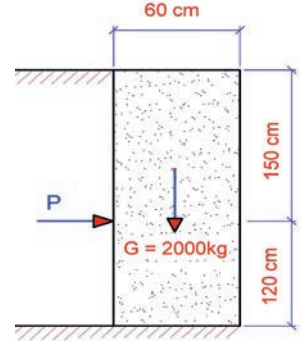
5. Bir noktada kesişen birden çok kuvvetin bileşkesinin bir dönme merkezine göre momenti, aynı noktaya göre momentlerinin cebirsel toplamına eşittir.

Yukarıda tanımı verilen teorem aşağıdaki seçeneklerin hangisinde doğru verilmiştir?

- A) Cosinüs Teoremi  
B) Lami-Sinüs Teoremi  
C) İzdüşüm Yöntemi  
D) Kuvvet Çifti Teoremi  
E) Varignon Teoremi

6. Şekilde yol kenarında meydana gelen toprak kaymalarına karşı istinat duvarı yapılmıştır. Toprağın istinat duvarına etki ettiği düzgün yayılı yük tekil olarak P kuvveti şeklinde gösterilmiştir. İstinat duvarının ağırlığı  $G = 2000 \text{ kg}$  olduğuna göre istinat duvarının devrilmemesi için P kuvveti en fazla kaç kg olmalıdır?

- A) 500  
B) 600  
C) 800  
D) 1000  
E) 2000



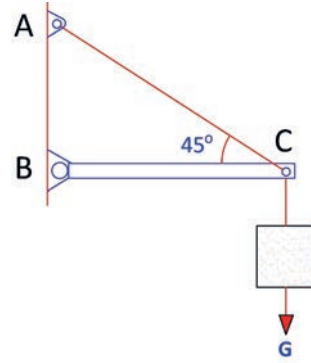
7. Bir O noktası ile F kuvveti arasındaki açı  $\alpha$  ve kuvvetin O noktasına olan uzaklığı L kadardır. F kuvvetinin O noktasına göre momenti aşağıda verilen seçeneklerin hangisinde doğru verilmiştir?

- A)  $F.L.\cos\alpha$     B)  $F.L.\sin\alpha$     C)  $2F.L.\cos\alpha$     D)  $F.L.\tan\alpha$     E)  $2F.L.\sin\alpha$

8. G ağırlığında bir cisim, yatayla  $45^\circ$  açı yapan bir AC halatı ve yatay bir BC çubuğunun ucuna asılmıştır ve sistem dengededir. Halattaki gerilme kuvveti 200 kg olduğuna göre cismin G ağırlığı kaç kg olur?

(BC çubuğu ağırlıksız kabul edilecektir.)

- A) 381,30  
B) 282,80  
C) 221,70  
D) 141,40  
E) 70,70



9. Bir cisme etki eden kuvvetlerin dengede olabilmesi için kuvvetlerin doğrultuları ne şekilde kesişmelidir?

- A) Aynı noktada  
B) Orta noktada  
C) Kesişme noktasında  
D) Bitiş noktasında  
E) Farklı noktada

10. Durumu değiştirilen cisim her zaman dengesini korur. Böyle dengede cismin ağırlık merkezi daima aynı yüksekliği korur.

Yukarıda tanımı verilen denge türü aşağıdaki seçeneklerin hangisinde doğru verilmiştir?

- A) Kararlı denge  
B) Dinamik denge  
C) Statik denge  
D) Kararsız denge  
E) Bozulmaz denge



Ölçme Değerlendirme sorularını cevaplamayı tamamladıysanız kitabın sonunda verilen cevap anahtarından cevaplarınızı kontrol edebilirsiniz. Yanlış cevapladığınız soruları öğretmeninize sorunuz.



ÖĞRENME  
BİRİMİ

# AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

## KONULAR

3.1. YÜZEYLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

3.2. YÜZEYLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI UYGULAMASI

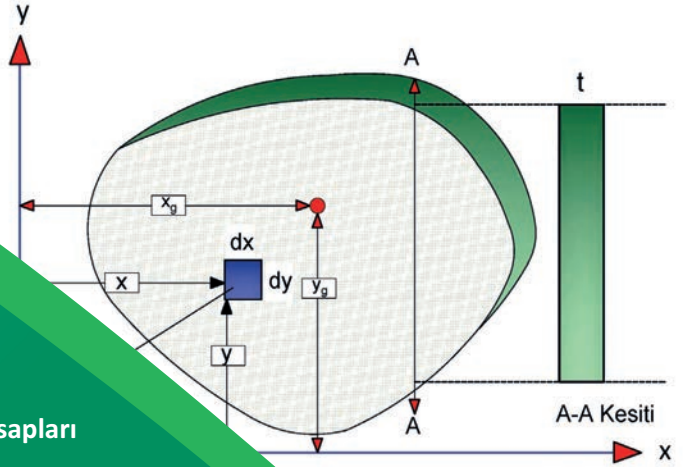
3.3. CİSİMLERİN VE YAPI ELEMANLARININ AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

3.4. BİRLEŞİK CİSİMLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI UYGULAMASI

3.5. YAPI ELEMANLARININ AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI UYGULAMASI

### NELER ÖĞRENECEKSİNİZ ?

- Basit Geometrik Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesapları
- Birleşik Geometrik Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesapları
- Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesap Uygulamaları
- Basit Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi Hesapları
- Birleşik Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi Hesapları
- Birleşik Cisimlerin Ağırlık Merkezi Hesapları Uygulamaları
- Yapı Elemanları Ağırlık Merkezi Hesapları Uygulamaları



### TEMEL KAVRAMLAR

ağırlık merkezi, basit geometrik şekiller, birleşik geometrik şekiller, cisimlerin ağırlık merkezleri, yapı elemanları ağırlık merkezleri, yüzeylerin ağırlık merkezleri





## HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Çevrenizde bulunan cisimlerin ve yapı elemanlarının geometrik yüzeylerini inceleyiniz.
- İncelediğiniz geometrik yüzeylerin ağırlık merkezlerini araştırınız ve bunları arkadaşlarınızla paylaşınız.

## 3.1. YÜZEYLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

Statikte çok küçük bir alana etki eden birbirlerine paralel yayılı kuvvetlerin toplamı, o alanın merkezinde tek bir tekil kuvvet olarak göz önüne alınır. Bu durum cismin ağırlığı ile ifade edilir. Cismin her bir küçük parçasının ağırlığı dünya merkezine doğru yönelir. Dünya merkezine yönelen bu ağırlıklar ise paralel kuvvetleri oluşturur. Paralel konumdaki yayılı hâlde olan bu kuvvetlerin toplamı cismin ağırlığıdır. Bu ağırlık kuvvetinin cisme etkidiği nokta, o cismin ağırlık merkezidir.

Bir cismi oluşturan parçalara etki eden yerçekimi kuvvetlerinin cismin üzerinden geçtiği noktaya **ağırlık merkezi** denir.

Dünyanın bir cisme uyguladığı yerçekimi kuvveti o cismin ağırlığıdır. Bu kuvvet, cismin üzerine yayılmış çok sayıda kuvvet ile gösterilir ve bunların ağırlık kuvveti yani bileşkesi "W" ile gösterilir. Ağırlık merkezinin yeri "G" ile ifade edilir (Şekil 3.1). Cismin ağırlık merkezinin koordinatları (x, y, z) ve yüzeyin ağırlık merkezi koordinatları ise (x, y) şeklinde ifade edilir.

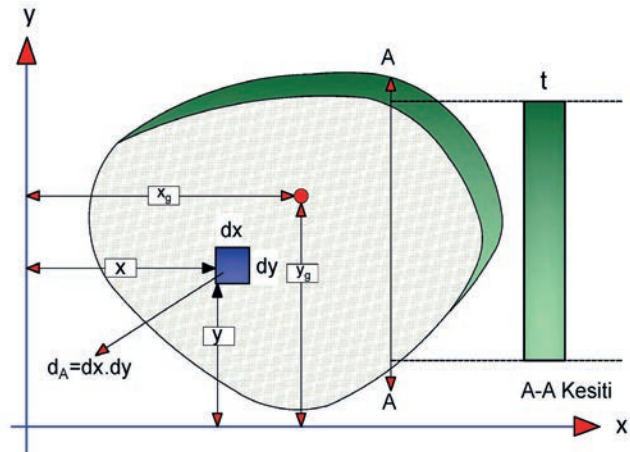


Şekil 3.1: Cismin ağırlığı ve ağırlık merkezi

### 3.1.1. Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesap Yöntemleri

Yüzeylerin ağırlık merkezleri noktaya göre statik moment ve eksene göre statik momentten faydalanılarak hesaplanır. Düzlem bir yüzeyin ağırlık merkezinin bir eksene uzaklığı ile yüzeyin alanının çarpımına yüzeyin **statik momenti** denir.

Alanı A, ağırlık merkezinin koordinatları  $x_g$  ve  $y_g$  olan düzlem bir yüzeyin statik momenti yandaki gibi hesaplanır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2: Statik moment

y eksenine göre statik moment:  $x_g \cdot A$   
 x eksenine göre statik moment:  $y_g \cdot A$  bağıntılarıyla hesaplanır.

Şekil 3.2'de, x ve y eksenlere olan uzaklığı; dA, alansal diferansiyel elemanı göstermektedir. Eğer eksen yüzeyin ağırlık merkezinden geçiyorsa statik moment sıfır olur.

Birden fazla geometrik şekilden oluşması halinde yüzeylerin x ve y eksenlerine statik momentleri:

x eksenine göre  $\sum x_g \cdot A$

y eksenine göre  $\sum y_g \cdot A$  bağıntısıyla bulunur.

Basit geometrik yüzeylerin (kare, dikdörtgen, üçgen, daire, yarım daire, çeyrek daire vb.) ağırlık merkezlerinin koordinatları bu yüzeylerin x ve y eksenlerine olan geometrik merkezleridir. Homojen bir cismin kütle merkezi varsa simetri düzlem üzerindedir. Eğer birbirini kesen iki tane simetri düzlemi varsa simetri düzlemlerinin kesişme doğrusu üzerindedir. Bu doğruyu da kesen bir simetri düzlemi daha varsa o zaman doğrunun düzlemi kestiği nokta cismin kütle merkezidir.

Birleşik yüzeylerin ağırlık merkezi, birleşik yüzeyi oluşturan yüzeylerin x ve y (apsis, ordinat) eksenlerine olan uzaklıkları (koordinatları) ve bu yüzeylerin alanlarının birlikte kullanılması ile bulunur.

x eksenine göre ağırlık merkezi apsisi:  $x_g = \frac{\sum x \cdot A}{\sum A}$

y eksenine göre ağırlık merkezi ordinatı:  $y_g = \frac{\sum y \cdot A}{\sum A}$

$x_g$  ve  $y_g$  bağıntılarında verilen parametreler olan statik momentler aşağıda verilen bağıntılarla hesaplanır.

$$\sum x \cdot A = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 + \dots + A_n \cdot x_n$$

$$\sum y \cdot A = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + \dots + A_n \cdot y_n$$

$$\sum A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

Yüzeylerin ağırlık merkezleri, basit geometrik şekilli yüzeyler (alanlar) ve birleşik şekilli yüzeyler olmak üzere iki grupta incelenir.

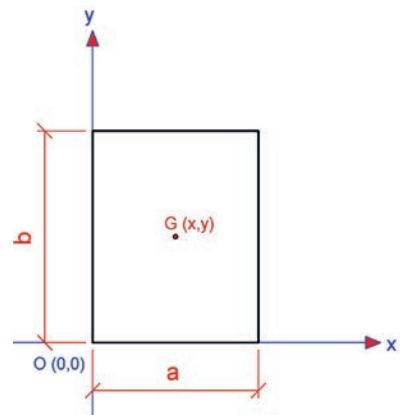
### 3.1.1.1. Basit Geometrik Yüzeylerin Ağırlık Merkezleri

Basit geometrik şekilli yüzeyler; kare, dikdörtgen, üçgen, daire, yarım daire, çeyrek daire gibi yüzeylerdir. Bu şekillerin ağırlık merkezlerinin koordinatları (x, y) ve alanları ile ilgili bağıntılar aşağıda verilmiştir.

**Kare veya Dikdörtgenin Ağırlık Merkezi:** Kare ve dikdörtgende ağırlık merkezi koordinatları x ve y eksenlerinin kesişim noktası O (0, 0) koordinatına göre kare veya dikdörtgenin kenar uzunluklarının orta noktalarıdır (Şekil 3.3).

Kare ve dikdörtgenin ağırlık merkezi koordinatları

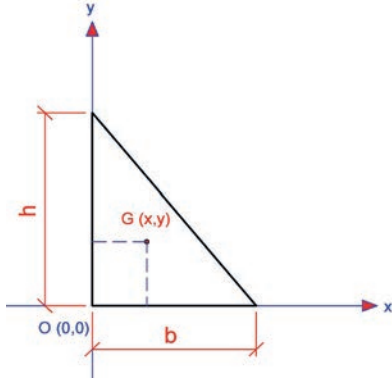
$$G(x, y) = \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad A = a \cdot b$$



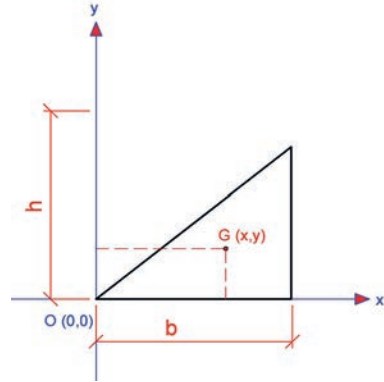
Şekil 3.3: Dikdörtgenin ağırlık merkezi



**Üçgenin Ağırlık Merkezi:** Üçgende ağırlık merkezi kenarları iki eşit parçaya bölen kenarortay uzunluklarının kesişim noktasıdır. Aşağıda verilen Şekil 3.4.a ve Şekil 3.4.b'de kenarortayların kesişim noktaları  $G(x,y)$  ile gösterilmiştir.



Şekil 3.4.a: Dik üçgenin ağırlık merkezi



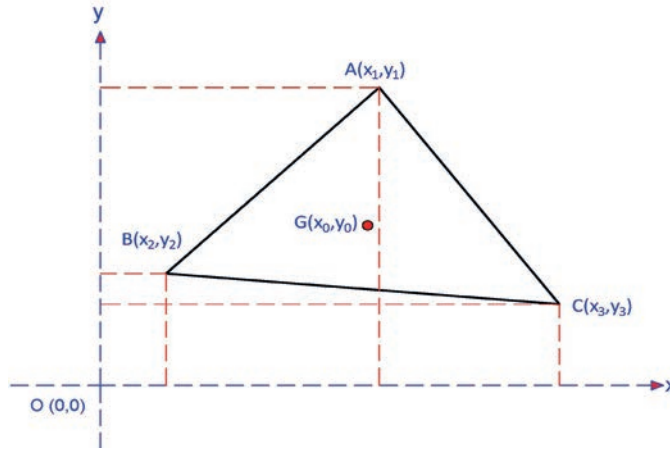
Şekil 3.4.b: Dik üçgenin ağırlık merkezi

Şekil 3.4.a'da görülen dik üçgenin ağırlık merkezi koordinatları  $G(x,y) = \left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3}\right)$

Şekil 3.4.b'de görülen dik üçgenin ağırlık merkezi koordinatları  $G(x,y) = \left(\frac{2b}{3}, \frac{h}{3}\right)$

Şekil 3.4.a ve Şekil 3.4.b'de görülen üçgenlerin alanı;  $A = \frac{b \cdot h}{2}$  formülüyle hesaplanır.

Şekil 3.5'te verilen üçgenin A, B ve C köşe noktalarının koordinatları biliniyorsa üçgenin ağırlık merkezi koordinatları aşağıdaki gibi hesaplanır.



Şekil 3.5: Köşe noktalarının koordinatları bilinen çeşitkenar üçgenin ağırlık merkezi

$G(x_0, y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$  bağıntısıyla hesaplanır.

Çeşitkenar üçgenlerde alan;  $A = \sqrt{U(U-a)(U-b)(U-c)}$  bağıntısıyla hesaplanır.

Bağıntıda verilen  $U = \frac{a+b+c}{2}$  formülü ile hesaplanır.

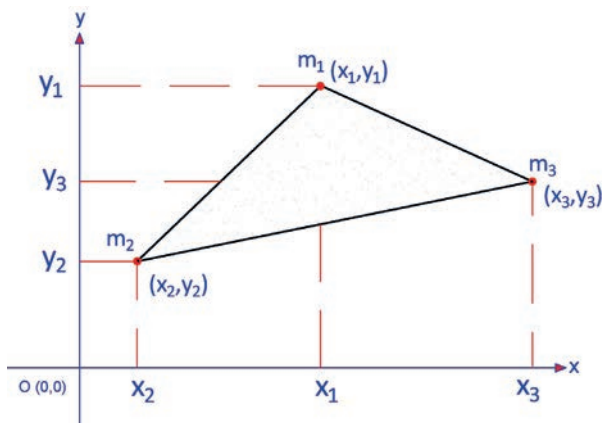
Şekil 3.6'da verilen  $m_1$ ,  $m_2$  ve  $m_3$  kütleli cisimleri ele alırsak, bu üç kütle cisimlerin kütle merkezi buldukları noktaları birleştiren üçgensel bölgenin içinde olacaktır.

Şekil 3.6'daki noktaların kütle merkezi  $(X_{KM}, Y_{KM})$  olarak ifade edilirse cismin kütle merkezi

$$x_{KM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{KM} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

bağıntıları ile hesaplanır.



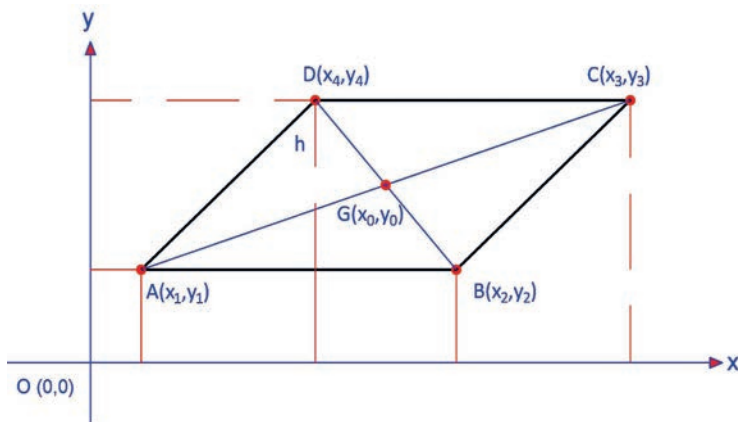
Şekil 3.6:  $m_1$ ,  $m_2$  ve  $m_3$  kütleli cisimler ve koordinatları

**Paralelkenarın Ağırlık Merkezi:** Şekil 3.7'de verilen paralelkenarın A, B, C ve D köşe noktalarının koordinatları ve h yüksekliği biliniyorsa üçgenin alanı ve ağırlık merkezi koordinatları aşağıdaki gibi hesaplanır. Paralelkenarda,  $|DG| = |BG|$  ve  $|AG| = |CG|$  eşitliği söz konusudur.

Paralelkenarın alanı

$$A = |AB| \cdot h$$

formülüyle hesaplanır.



Şekil 3.7: Köşe noktalarının koordinatları bilinen paralelkenarın ağırlık merkezi

Şekil 3.7'de verilen  $G(x_0, y_0)$  ağırlık merkezi koordinatları orta nokta bağıntısından

$$x_0 = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2} \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2} \Rightarrow y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Yani paralelkenarın karşılıklı köşelerinin apsisi birbirine eşittir. Yine karşılıklı köşelerin ordinatları toplamı da birbirine eşittir. Bu özellikler; **dikdörtgen, eşkenar üçgen ve kare** için de geçerlidir.



## Dairenin Ağırlık Merkezi

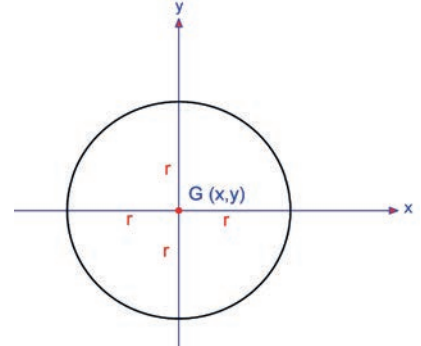
Şekil 3.8'deki dairenin ağırlık merkezi koordinatları

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$G(0, 0)$  olur.

Dairenin alanı;  $A = \pi r^2$



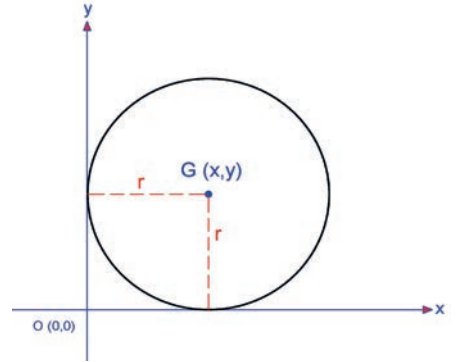
Şekil 3.8: Daire yayının x ve y ekseninin merkezinde olması durumunda ağırlık merkezi

Şekil 3.9'daki dairenin ağırlık merkezi koordinatları

$$x = r$$

$$y = r$$

$G(r, r)$  olur.



Şekil 3.9: Daire yayının x ve y eksenine teğet olması durumunda ağırlık merkezi

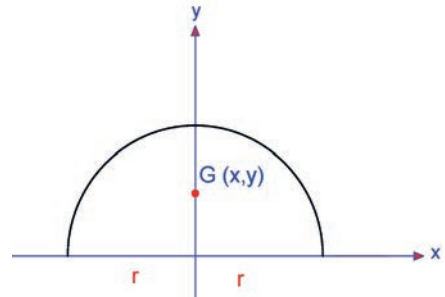
## Yarım Dairenin Ağırlık Merkezi

Şekil 3.10'daki yarım dairenin ağırlık merkezi koordinatları

$$x = 0$$

$$y = \frac{4r}{3\pi} \quad G\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right) \text{ olur.}$$

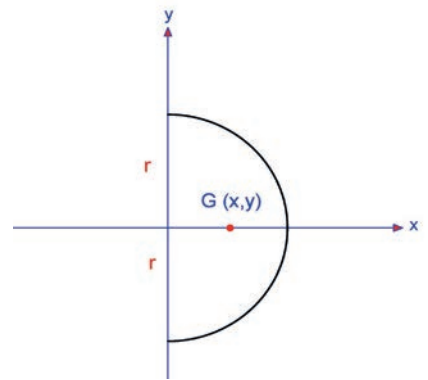
Yarım dairenin alanı;  $A = \frac{\pi r^2}{2}$



Şekil 3.10: y ekseninin yarım daire yayını ortasından kesmesi ağırlık merkezi

Şekil 3.11'deki yarım dairenin ağırlık merkezi koordinatları

$$x = \frac{4r}{3\pi} \quad y = 0 \quad G\left(\frac{4r}{3\pi}, 0\right) \text{ olur.}$$



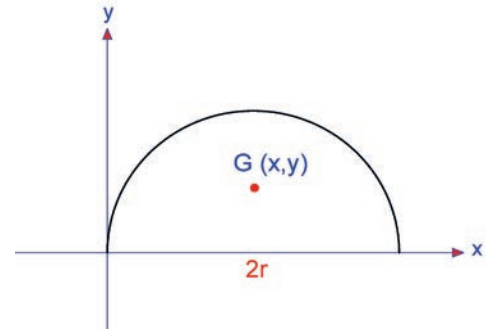
Şekil 3.11: x ekseninin yarım daire yayını ortasından kesmesi ağırlık merkezi

Şekil 3.12'deki yarım dairenin ağırlık merkezi koordinatları

$$x = r$$

$$y = \frac{4r}{3\pi}$$

$$G\left(r, \frac{4r}{3\pi}\right) \text{ olur.}$$



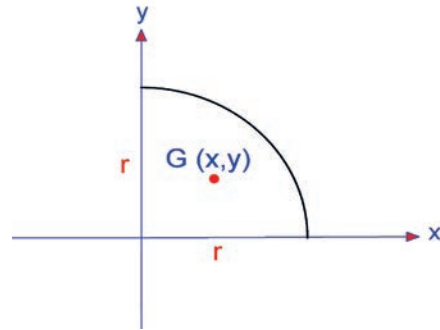
Şekil 3.12: Yarım daire yayının iki ucunun x eksenine oturması ağırlık merkezi

### Çeyrek Dairenin Ağırlık Merkezi

Çeyrek dairenin ağırlık merkezi koordinatları

$$x = \frac{4r}{3\pi} \quad y = \frac{4r}{3\pi} \quad G\left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}\right) \text{ olur.}$$

$$\text{Çeyrek dairenin alanı } A = \frac{\pi r^2}{4}$$



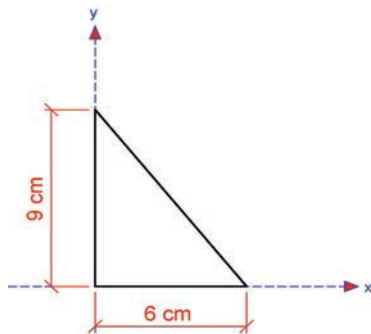
Şekil 3.13: Çeyrek dairenin ağırlık merkezi

### 3.1.1.2. Basit Geometrik Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesapları

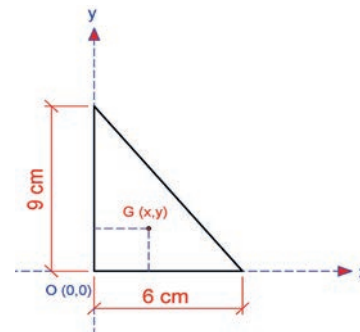
Basit yüzeylerin ağırlık merkezi hesapları ile ilgili çözümlü problemler aşağıda verilmiştir.

**Problem:** Şekil 3.14'te verilen dik üçgenin ağırlık merkezi koordinatlarını ve alanını hesaplayınız.

**Çözüm:** Dik üçgende,  $b = 6 \text{ cm}$  ve  $h = 9 \text{ cm}$ 'dir.



Şekil 3.14: Dik üçgen

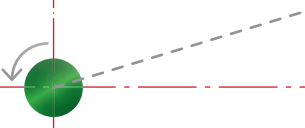


Şekil 3.15: Dik üçgenin ağırlık merkezi koordinatları

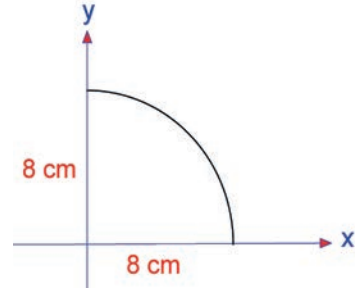
Ağırlık merkezi koordinatları ve alanı

$$G(x, y) = \left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{9}{3}\right) \Rightarrow G(x, y) = (2, 3) \text{ olur.}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 9}{2} \Rightarrow A = 27 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$



**Problem:** Şekil 3.16'da verilen çeyrek dairenin ağırlık merkezi koordinatlarını ve alanını hesaplayınız ( $\pi = 3,14$  alınacaktır).



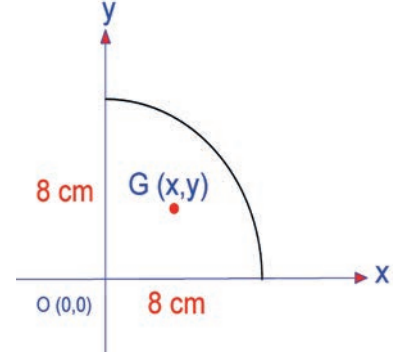
Şekil 3.16: Çeyrek daire

**Çözüm:** Şekil 3.17'de verilen çeyrek dairede,  $r = 8$  cm'dir. Ağırlık merkezi koordinatları ve alanı

$$x = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 8}{3 \times 3,14} = \frac{32}{9,42} \Rightarrow x = 3,397 \text{ cm bulunur.}$$

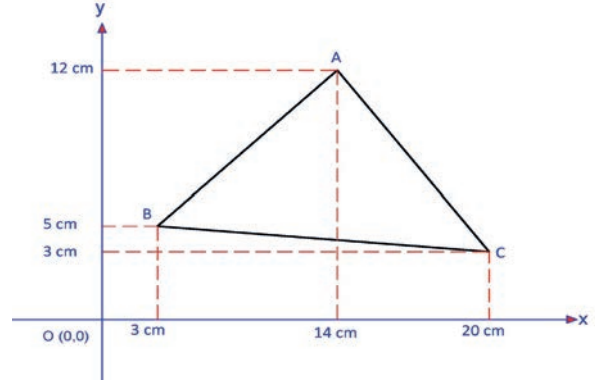
$$y = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 8}{3 \times 3,14} = \frac{32}{9,42} \Rightarrow y = 3,397 \text{ cm bulunur.}$$

$$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3,14 \times 8^2}{4} = \frac{200,96}{4} \Rightarrow A = 50,24 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$



Şekil 3.17: Çeyrek daire ağırlık merkezi koordinatları

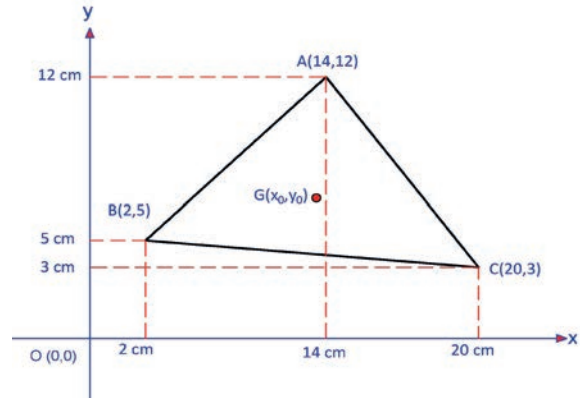
**Problem:** Şekil 3.18'de verilen üçgende A, B ve C noktasının koordinatlarını şekil üzerinde gösteriniz ve ABC üçgeninin ağırlık merkezi koordinatlarını hesaplayınız.



Şekil 3.18: Üçgenin apsisi ve ordinatları

**Çözüm:** Üçgende A, B ve C noktalarının koordinatları Şekil 3.19'daki gibi çizilerek gösterilir.

Şekil 3.19'dan faydalanarak üçgenin ağırlık merkezi koordinatları



Şekil 3.19: Üçgenin koordinatları (apsisi ve ordinatları) gösterimi

$$G(x_0, y_0) = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) = \left( \frac{14 + 2 + 20}{3}, \frac{12 + 5 + 3}{3} \right) \Rightarrow G(x_0, y_0) = (12; 6,67) \text{ bulunur.}$$

### 3.1.1.3. Bileşik Geometrik Yüzeylerin Ağırlık Merkezi Hesapları

Birleşik geometrik yüzeylerin ağırlık merkezi koordinatları basit geometrik şekillerden oluşan yüzeylerin özellikleri kullanılarak hesaplanır.

Birleşik yüzeylerin ağırlık merkezi hesaplarında aşağıda verilen bağıntılar kullanılır.

$$\text{Birleşik yüzeylerin } x \text{ eksenine göre ağırlık merkezinin apsisi: } x_g = \frac{\sum x \cdot A}{\sum A}$$

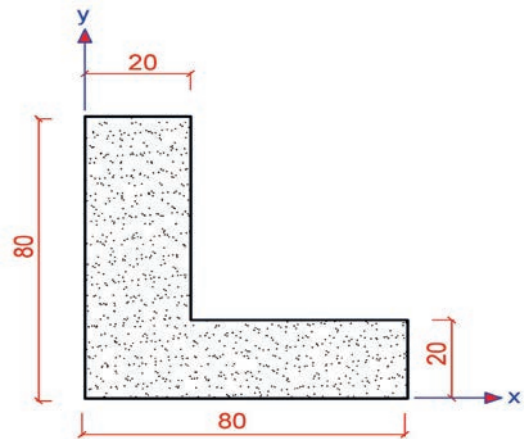
$$\text{Birleşik yüzeylerin } y \text{ eksenine göre ağırlık merkezi ordinatı: } y_g = \frac{\sum y \cdot A}{\sum A}$$

Birleşik yüzeylerin koordinatları olan  $x_g$  ve  $y_g$  bağıntılarında verilen statik moment toplamları ve alan toplamı parametreleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} \sum x \cdot A &= A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 + \dots + A_n \cdot x_n \\ \sum y \cdot A &= A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + \dots + A_n \cdot y_n \\ \sum A &= A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n \end{aligned}$$

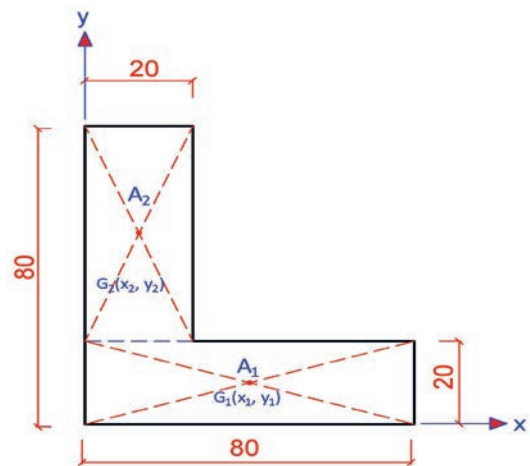
Bileşik yüzeylerde boşluk alanları olması durumunda, **boşluk alanları** (-) olarak alınır. Statik moment hesapları bu durum dikkate alınarak yapılır.

**Problem:** Şekil 3.20'de verilen birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız (Ölçüler cm olarak verilmiştir.).



Şekil 3.20: Birleşik geometrik yüzey

**Çözüm:** Şekil 3.20'de verilen birleşik geometrik yüzey Şekil 3.21'de olduğu gibi basit geometrik şekillere ayrılarak çizilir.



Şekil 3.21: Birleşik geometrik yüzeyin basit geometrik şekillere ayrılması



**1. Yöntem:** Birleşik geometrik yüzeyden Şekil 3.21'de olduğu gibi  $A_1$  ve  $A_2$  alanlarından,  $G_1$  ve  $G_2$  ağırlık merkezlerinden oluşan 2 dikdörtgen alan elde edilir. Bu durumda ağırlık merkezinin koordinatları aşağıda görüldüğü gibi hesaplanır.

$$A_1 = 80 \times 20 \Rightarrow A_1 = 1600 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 60 \times 20 \Rightarrow A_2 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$G_1(x_1, y_1) = \left(\frac{80}{2}, \frac{20}{2}\right) \Rightarrow G_1(40, 10)$$

$$G_2(x_2, y_2) = \left(\frac{20}{2}, 20 + \frac{60}{2}\right) \Rightarrow G_2(10, 50)$$

$$x_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{x_1.A_1 + x_2.A_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \times 1600 + 10 \times 1200}{1600 + 1200} = \frac{64000 + 12000}{2800} = \frac{76000}{2800} \Rightarrow x_g = 27,14 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{y_1.A_1 + y_2.A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \times 1600 + 50 \times 1200}{1600 + 1200} = \frac{16000 + 60000}{2800} = \frac{76000}{2800} \Rightarrow y_g = 27,14 \text{ cm}$$

Şekil 3.20'de verilen birleşik geometrik şekillerden oluşan yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatları;  $G(x_g, y_g) = G(27,14; 27,14)$  bulunur.

**2. Yöntem:** Ağırlık merkezi koordinat verileri pratik çözüm tablosuna aktarılır, gerekli hesaplamalar aşağıdaki gibi yapılır.

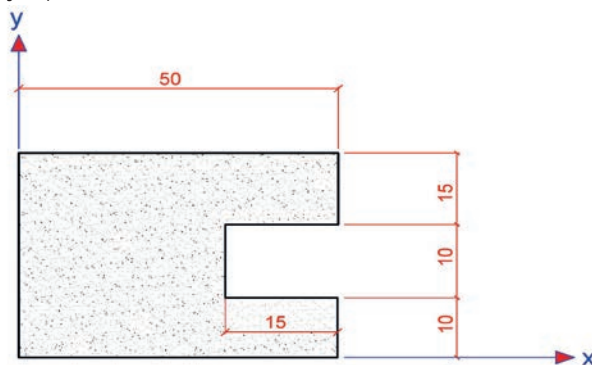
Şekil No ve Adı	Şekil	A (Alan)	x	y	A.x	A.y
(+) 1 no.lu parça dikdörtgen		$80 \times 20 = 1600 \text{ cm}^2$	$\frac{80}{2} = 40 \text{ cm}$	$\frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$	64000	16000
(+) 2 no.lu parça dikdörtgen		$60 \times 20 = 1200 \text{ cm}^2$	$\frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$	$20 + \frac{60}{2} = 50 \text{ cm}$	12000	60000
$\Sigma$		<b>2800 cm<sup>2</sup></b>			<b>76000</b>	<b>76000</b>

$$x_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{76000}{2800} = x_g = 27,14 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{76000}{2800} \Rightarrow y_g = 27,14 \text{ cm}$$

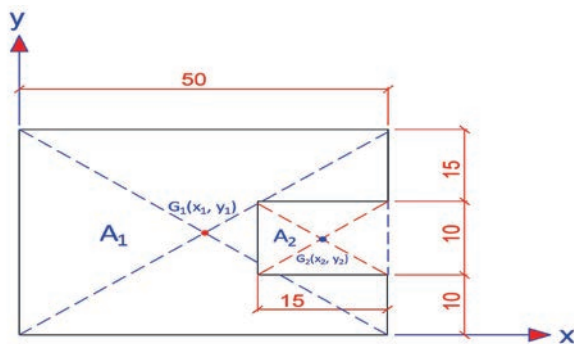
$G(x_g, y_g) = G(27,14; 27,14)$  bulunur.

**Problem:** Şekil 3.22’de verilen birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız (Ölçüler cm olarak verilmiştir).



Şekil 3.22: Birleşik geometrik yüzey

**Çözüm:** Şekil 3.22’de verilen birleşik geometrik yüzey Şekil 3.23’te olduğu gibi basit geometrik şekillere ayrılarak çizilir.



Şekil 3.23: Birleşik geometrik yüzeyin basit geometrik şekillere ayrılması

**1. Yöntem:** Birleşik geometrik yüzey Şekil 3.23’te olduğu gibi;  $A_1$  ve  $A_2$  alanları ile  $G_1$  ve  $G_2$  ağırlık merkezlerinden oluşmaktadır.  $A_1$  dikdörtgeni yüzeyin tamamıdır.  $A_2$  dikdörtgen yüzeyi ise boşluk parçasını oluşturmaktadır.

$$A_1 = 50 \times 35 \Rightarrow A_1 = 1750 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 15 \times 10 \Rightarrow A_2 = 150 \text{ cm}^2$$

$$G_1(x_1, y_1) = \left( \frac{50}{2}, \frac{35}{2} \right) \Rightarrow G_1(25; 17,5)$$

$$G_2(x_2, y_2) = \left( 35 + \frac{15}{2}, 10 + \frac{10}{2} \right) = (35 + 7,5; 10 + 5) \Rightarrow G_2(42,5; 15)$$

$$x_g = \frac{\sum x \cdot A}{\sum A} = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{25 \times 1750 - 42,5 \times 150}{1750 - 150} = \frac{43750 - 6375}{1600} = \frac{37375}{1600} \Rightarrow x_g = 23,36 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum y \cdot A}{\sum A} = \frac{y_1 \cdot A_1 - y_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{17,5 \times 1750 - 15 \times 150}{1750 - 150} = \frac{30625 - 2250}{1600} = \frac{28375}{1600} \Rightarrow y_g = 17,74 \text{ cm}$$

Şekil 3.23’te verilen birleşik geometrik şekillerden oluşan yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatları

**G** ( $x_g, y_g$ ) = **G (23,36; 17,74)** bulunur.



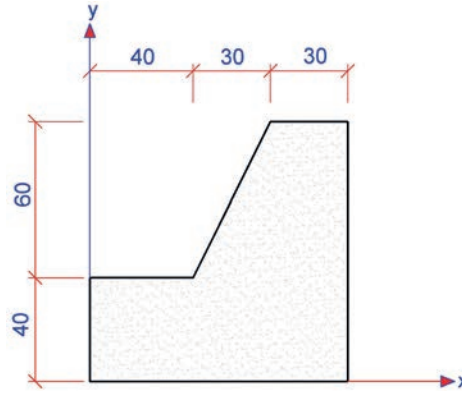
**2. Yöntem:** Ağırlık merkezi koordinat verileri pratik çözüm tablosuna aktarılır ve gerekli hesaplamalar aşağıda görüldüğü gibi yapılır. Çözümde dikkat edilmesi gereken boşluk olan parça (-) olarak alınır.

Şekil No ve Adı	Şekil	A (Alan)	x	y	A.x	A.y
(+) 1 no.lu parça dikdörtgen		$50 \times 35 = 1750 \text{ cm}^2$	$\frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$	$\frac{35}{2} = 17,5 \text{ cm}$	43750	30625
(-) 2 no.lu parça dikdörtgen		$-15 \times 10 = -150 \text{ cm}^2$	$35 + \frac{15}{2} = 42,5 \text{ cm}$	$10 + \frac{10}{2} = 15 \text{ cm}$	-6375	-2250
$\Sigma$		<b>1600 cm<sup>2</sup></b>			<b>37375</b>	<b>28375</b>

$$x_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{37375}{1600} \Rightarrow x_g = 23,36 \text{ cm} \quad y_g = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{28375}{1600} \Rightarrow y_g = 17,74 \text{ cm}$$

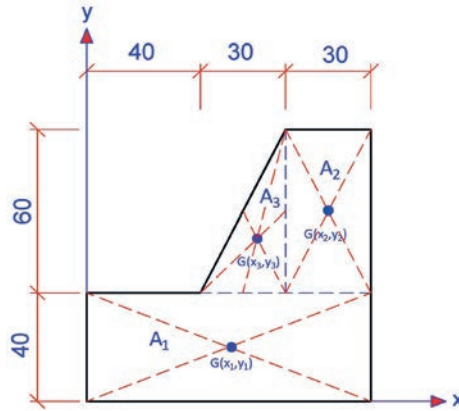
**G** ( $x_g$ ,  $y_g$ ) = **G (23,36; 17,74)** bulunur.

**Problem:** Şekil 3.24'te verilen birleşik geometrik yüzeylerden oluşan istinat duvarının ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız (Ölçüler cm olarak verilmiştir.).



Şekil 3.24: Birleşik geometrik yüzey




**Çözüm:** Şekil 3.24'te verilen birleşik geometrik yüzeylerden oluşan istinat duvarı Şekil 3.25'te olduğu gibi basit geometrik şekillere ayrılarak çizilir.



Şekil 3.25: Birleşik geometrik yüzeyin basit geometrik şekillere ayrılması

Birleşik geometrik yüzeyden Şekil 3.25'te olduğu gibi  $A_1$ ,  $A_2$  ve  $A_3$  alanlarından,  $G_1$ ,  $G_2$  ve  $G_3$  ağırlık merkezlerinden oluşan 2 dikdörtgen ve 1 üçgen elde edilir.

Ağırlık merkezi koordinat verileri pratik çözüm tablosuna aktarılır ve gerekli hesaplamalar yapılır.

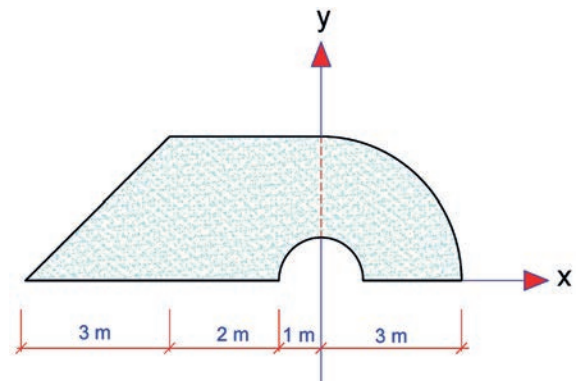
Şekil No ve Adı	Şekil	A (Alan)	x	y	A.x	A.y
(+) 1 no.lu parça dikdörtgen		40x100=4000 cm <sup>2</sup>	50 cm	20 cm	200000	80000
(+) 2 no.lu parça dikdörtgen		30x60 = 1800 cm <sup>2</sup>	(40+30+ 30/2) = 85 cm	40+(60/2) = 70 cm	153000	126000
(+) 3 no.lu parça üçgen		$\frac{30 \times 60}{2} = 900$ cm <sup>2</sup>	$40 + \frac{2b}{3} = 40 + \frac{2 \times 30}{3} = 60$ cm	$40 + \frac{h}{3} = 40 + \frac{60}{3} = 60$ cm	54000	<b>54000</b>
$\Sigma$		<b>6700 cm<sup>2</sup></b>			<b>407000</b>	<b>260000</b>

$$x_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{407000}{6700} \Rightarrow x_g = 60,75 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{260000}{6700} \Rightarrow y_g = 38,81 \text{ cm}$$

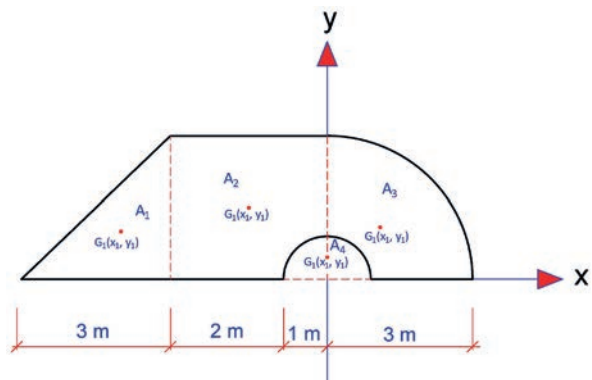
$G(x_g, y_g) = G(60,75; 38,81)$  bulunur.

**Problem:** Şekil 3.26'da verilen birleşik geometrik yüzeyde y eksenini boşluk olan yarım dairenin ortasından geçmektedir. y eksenini ise şeklin tabanından geçmektedir. Birleşik geometrik şeklin ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.

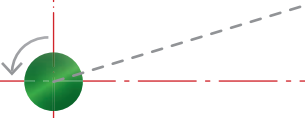


Şekil 3.26: Birleşik geometrik yüzey

**Çözüm:** Şekil 3.26'da verilen birleşik geometrik yüzey Şekil 3.27'de olduğu gibi basit geometrik şekillere ayrılarak çizilir.



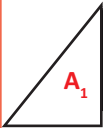

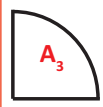

Şekil 3.27: Birleşik geometrik yüzeyin basit geometrik şekillere ayrılması



Birleşik geometrik yüzeyden Şekil 3.27'de olduğu gibi;  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  ve  $A_4$  alanlarından,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  ve  $G_4$  ağırlık merkezlerinden oluşan  $A_1$  alanı üçgen,  $A_2$  Alanı kare,  $A_3$  alanı çeyrek daire ve  $A_4$  alanı yarım daire olan basit geometrik şekiller elde edilir.

Şekil 3.27'de görüldüğü gibi y eksenini yarım dairenin ortasından geçmektedir. y ekseninin solunda kalan kare ve üçgenin y eksenine olan ağırlık merkezi yatay uzaklıklarının işareti **(-)** alınır. y ekseninin sağında kalan çeyrek dairenin y eksenine olan ağırlık merkezi yatay uzaklığının işareti **(+)** alınır. Yarım daire boşluk alanı ise x eksenini merkezinden geçtiğinden x eksenine olan uzaklığı **(0)** olacaktır.

Bu açıklamalar doğrultusunda birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezi koordinat verileri pratik çözüm tablosuna aktarılır ve gerekli hesaplamalar yapılır.

Şekil No ve Adı	Şekil	A (Alan)	x	y	A.x	A.y
(+) 1 no.lu parça üçgen		(+) $b \times h / 2$ $3 \times 3 / 2 = 4,5 \text{ m}^2$	(-) $-3/3 - 2 - 1 = -4 \text{ m}$	(+) $3/3 = 1 \text{ m}$	(-) -18	(+) 4,5
(+) 2 no.lu parça kare		(+) $3 \times 3 = 9,0 \text{ m}^2$	(-) $-3/2 = -1,5 \text{ m}$	(+) $3/2 = 1,5 \text{ m}$	(-) -13,5	(+) 13,5
(+) 3 no.lu parça çeyrek daire		(+) $\pi \times r^2 / 4 = 3,14 \times 3^2 / 4 = 7,07 \text{ m}^2$	(+) $4r/3\pi = 4 \times 3 / 3 \times 3,14 = 1,28$	(+) $4r/3\pi = 4 \times 3 / 3 \times 3,14 = 1,28 \text{ m}$	(+) 9	(+) 9
(-) 4 no.lu parça yarım daire		(-) $-\pi \times r^2 / 2 = -3,14 \times 3^2 / 2 = -14,13 \text{ m}^2$	(+) 0	(+) $4r/3\pi = 4 \times 3 / 3 \times 3,14 = 0,43$	(-) 0	(-) -0,67
	$\Sigma$	<b>17,43 m<sup>2</sup></b>			<b>-22,5</b>	<b>26,33</b>

$$x_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{-22,5}{17,43} \Rightarrow x_g = -1,29 \text{ m}$$

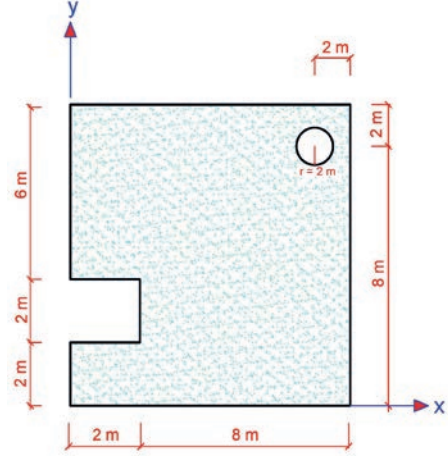
$$y_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{26,33}{17,43} \Rightarrow y_g = 1,51 \text{ m}$$

**G ( $x_g$ ,  $y_g$ ) = G (-1,29; 1,51)** bulunur.



### SIRA SİZDE

Şekil 3.28’de verilen birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız?



Şekil 3.28: Birleşik geometrik yüzey

## 3.2. UYGULAMA

# YÜZEYLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

8 DERS SAATI

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



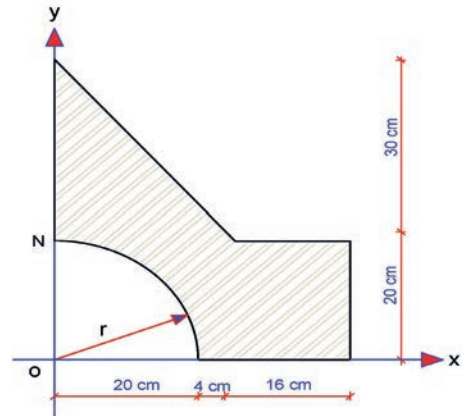
36147

Bu çalışmanın amacı, yüzeylerin ağırlık merkezleri hesaplama ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

Yüzeylerin ağırlık merkezi hesap uygulamalarını, aşağıdaki işlem basamakları, Şekil 3.29’daki birleşik geometrik yüzeyi ve ölçülerini dikkate alarak öğretmeninizin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 3.29’da görülen birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.
- Şekil 3.29’da görülen birleşik geometrik yüzeyde x ekseninin N noktasına kaydırılması durumunda ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.



Şekil 3.29: Birleşik geometrik yüzey



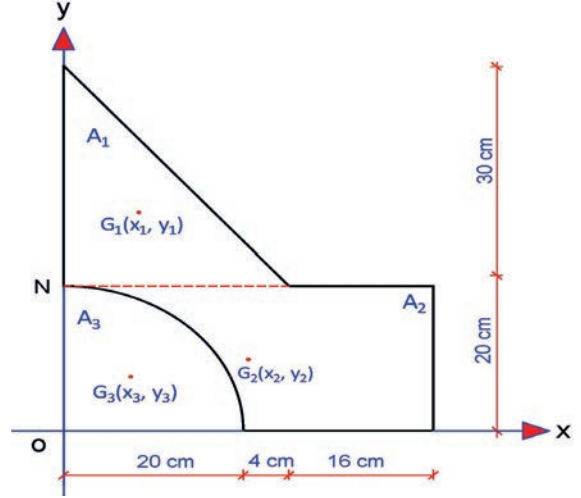
## Yönerge

- Çalışmanızda birleşik geometrik yüzeyi basit geometrik şekillere doğru ayırmaya dikkat ediniz.
- Ayırdığınız basit geometrik şekillerin x ve y eksenlerine göre ağırlık merkezi uzaklıklarını doğru bir şekilde almaya dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Uygulama kontrol listesinde bu ölçütleri daha net görebilirsiniz.

## İşlem Basamakları

Şekil 3.29'da görülen birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezi:

- Şekil 3.29'da verilen birleşik geometrik yüzey, Şekil 3.30'da görüldüğü gibi basit geometrik şekillere ayrılarak çizilir. Bu durumda  $A_1$  üçgen,  $A_2$  dikdörtgen ve  $A_3$  çeyrek daireden oluşan basit geometrik şekiller elde edilir.
- Birleşik geometrik yüzeyin basit şekilleri üzerinde ağırlık merkezleri koordinatlarının yerleri gösterilir (Şekil 3.30).
- Birleşik geometrik yüzeyden  $A_1$ ,  $A_2$  ve  $A_3$  alan adları,  $G_1$ ,  $G_2$  ve  $G_3$  ağırlık merkezlerinin adları ve koordinatları yazılarak gösterilir (Şekil 3.30).



Şekil 3.30: Birleşik geometrik yüzeyin basit geometrik şekillere ayrılması

### 1. Yöntem:

- Basit şekillere ayrılan yüzeylerin alanları ( $A_1$ ,  $A_2$  ve  $A_3$ ) hesaplanır.

$$A_1 = \frac{bxh}{2} = \frac{24 \times 30}{2} \Rightarrow A_1 = 360 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = axb = 20 \times 40 \Rightarrow A_2 = 800 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3,14 \times 20^2}{4} \Rightarrow A_3 = -314 \text{ cm}^2$$

- Basit şekillere ayrılan yüzeylerin ( $G_1$ ,  $G_2$  ve  $G_3$ ) x ve y eksenlerine olan uzaklıklarının koordinatları hesaplanır.

$$G_1(x_1, y_1) = \left( \frac{24}{3}, 20 + \frac{30}{3} \right) \Rightarrow G_1(8, 30)$$

$$G_2(x_2, y_2) = \left( \frac{40}{2}, \frac{20}{2} \right) \Rightarrow G_2(20, 10)$$

$$G_3(x_3, y_3) = \left( \frac{4 \times 20}{3 \times 3,14}, \frac{4 \times 20}{3 \times 3,14} \right) \Rightarrow G_3(8,5; 8,5)$$



- Basit şekillere ayrılan yüzeylerin x ve y eksenlerine olan uzaklıklarının koordinatları ile birleşik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatları hesaplanır.

$$x_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{x_1.A_1 + x_2.A_2 - x_3.A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{8 \times 360 + 20 \times 800 - 8,5 \times 314}{360 + 800 - 314} = \frac{2880 + 16000 - 2669}{846} = \frac{16211}{846}$$

$$x_g = 19,16 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{y_1.A_1 + y_2.A_2 - y_3.A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{30 \times 360 + 10 \times 800 - 8,5 \times 314}{360 + 800 - 314} = \frac{10800 + 8000 - 2669}{846} = \frac{16131}{846}$$

$$y_g = 19,06 \text{ cm}$$

**G (x, y) = (19,16; 19,06)** bulunur.

## 2. Yöntem:

- Birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezi koordinat verileri pratik çözüm tablosuna aktarılır ve gerekli hesaplamalar yapılır.

Şekil No. ve Adı	Şekil	A (Alan)	x	y	A.x	A.y
(+) 1 no.lu parça üçgen		(+) 24x30/2 = 360 cm <sup>2</sup>	(+) 24/3 = 8 cm	(+) 20+30/3=30 cm	(+) 2880	(+) 10800
(+) 2 no.lu parça dikdörtgen		(+) 20x4 = 800 cm <sup>2</sup>	(+) 40/2 = 20 cm	(+) 20/2 = 10 cm	(+) 16000	(+) 8000
(-) 3 no.lu parça çeyrek daire		(-) -πr <sup>2</sup> /4 = -3,14x20 <sup>2</sup> /4 = -314 m <sup>2</sup>	(+) 4x20/3π = 80/3x3,14 = 8,5 cm	(-) 4x20/3π = 80/3x3,14 = 8,5 cm	(-) -2669	(-) -2669
Σ		846 cm <sup>2</sup>			16211	16131

- Tabloda bulunan statik moment toplamları ile alan toplamlarının oranlanmasıyla birleşik yüzeyin ağırlık merkezi koordinatları hesaplanır.

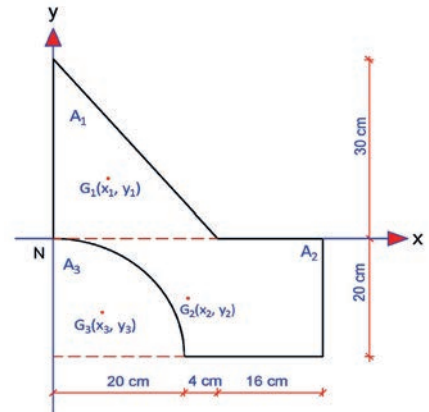
$$x_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{16211}{846} \Rightarrow x_g = 19,16 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{16131}{846} \Rightarrow y_g = 19,06 \text{ cm}$$

**G (x<sub>g</sub>, y<sub>g</sub>) = G ( 19,16; 19,06)** bulunur.

Şekil 3.29'da görülen birleşik geometrik yüzeyde x ekseninin N noktasına kaydırılması durumunda ağırlık merkezinin koordinatları:

- x eksen Şekil 3.31'de görüldüğü gibi N noktasına kaydırılarak çizilir.



Şekil 3.31: Birleşik geometrik yüzeyde x ekseninin N noktasına kaydırılması



- 1. Yöntem kullanılarak basit şekillere ayrılan yüzeylerin alanları ( $A_1$ ,  $A_2$  ve  $A_3$ ) hesaplanır.

$$A_1 = \frac{bxh}{2} = \frac{24 \times 30}{2} \Rightarrow A_1 = 360 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = axb = 20 \times 40 \Rightarrow A_2 = 800 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3,14 \times 20^2}{4} \Rightarrow A_3 = -314 \text{ cm}^2 \text{ ( Boşluk alanı olduğundan işareti negatif olur. )}$$

- Basit şekillere ayrılan yüzeylerin ( $G_1$ ,  $G_2$  ve  $G_3$ ) x ve y eksenlerine olan uzaklıklarının koordinatları hesaplanır.

$A_1$  üçgeni x eksenin üstünde yani (+) bölgede olduğundan

$$G_1(x_1, y_1) = \left( \frac{24}{3}, \frac{30}{3} \right) \Rightarrow G_1(8, 10)$$

$A_2$  dikdörtgeni x eksenin altında yani (-) bölgede olduğundan

$$G_2(x_2, y_2) = \left( \frac{40}{2}, -\frac{20}{2} \right) \Rightarrow G_2(20, -10)$$

$A_3$  çeyrek daire x eksenin altında yani (-) bölgede olduğundan

$$G_3(x_3, y_3) = \left( -\frac{4 \times 20}{3 \times 3,14}, -\frac{4 \times 20}{3 \times 3,14} \right) \Rightarrow G_3(8,5; -8,5)$$

- Basit şekillere ayrılan yüzeylerin x ve y eksenlerine olan uzaklıklarının koordinatları ile birleşik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatları hesaplanır.

$$x_g = \frac{\sum x.A}{\sum A} = \frac{x_1.A_1 + x_2.A_2 - x_3.A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{8 \times 360 + 20 \times 800 - 8,5 \times 314}{360 + 800 - 314}$$

$$x_g = \frac{2880 + 16000 - 2669}{846} = \frac{16211}{846} \Rightarrow x_g = 19,16 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum y.A}{\sum A} = \frac{y_1.A_1 + (-y_2.A_2) - (-y_3.A_3)}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{10 \times 360 + (-10 \times 800) - (-8,5 \times 314)}{360 + 800 - 314}$$

$$y_g = \frac{3600 - 800 + 2669}{846} = \frac{5469}{846} \Rightarrow y_g = 6,46 \text{ cm}$$

**G (x, y) = (19,16; 6,46)** bulunur.



### BİLGİ KUTUSU

Şekil 3.29'da verilen birleşik yüzeyin x ve y eksenlerine göre ağırlık merkezi koordinatları 1. ve 2. yöntem ile hesaplanmıştır. x ekseninin N noktasına kaydırılması ile oluşan yeni duruma göre 1. yöntem kullanılarak ağırlık merkezi koordinatları hesaplanmıştır.

x ekseninin N noktasına kaydırılması ile oluşan yeni duruma göre 2. yöntemi kullanarak 1. yöntemde bulunan ağırlık merkezi koordinatlarının doğruluk sağlamasını yapabilirsiniz.



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için “Evet”, kazanamadığınız beceriler için “Hayır” kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
<b>Birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezi</b>			
1	Verilen birleşik geometrik yüzeyi basit geometrik şekillere ayırarak çizdiniz mi?		
2	Birleşik geometrik yüzeyin basit şekilleri üzerinde ağırlık merkezleri koordinatlarının yerlerini gösterdiniz mi?		
3	Birleşik geometrik yüzeyden $A_1$ , $A_2$ ve $A_3$ alan adları ile $G_1$ , $G_2$ ve $G_3$ ağırlık merkezlerinin adları ve koordinatlarını yazarak gösterdiniz mi?		
<b>1. Yöntem</b>			
4	Basit şekillere ayrılan yüzeylerin alanlarını ( $A_1$ , $A_2$ ve $A_3$ ) hesapladınız mı?		
5	Basit şekillere ayrılan yüzeylerin ( $G_1$ , $G_2$ ve $G_3$ ) x ve y eksenlerine olan uzaklıklarının koordinatlarını hesapladınız mı?		
6	Basit şekillere ayrılan yüzeylerin x ve y eksenlerine olan uzaklıklarının koordinatları ile birleşik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatlarını hesapladınız mı?		
<b>2. Yöntem</b>			
7	Birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezi koordinatları hesabı için veriler pratik çözüm tablosuna aktararak gerekli hesaplamaları yaptınız mı?		
8	Tabloda bulunan statik moment toplamları ile alan toplamlarını oranlayıp birleşik yüzeyin ağırlık merkezi koordinatları hesapladınız mı?		
<b>Birleşik geometrik yüzeyde x ekseninin N noktasına kaydırılması durumunda ağırlık merkezinin koordinatları</b>			
1	Birleşik geometrik yüzeyde N noktasına x eksenini kaydırılmış şekilde çizdiniz mi?		
2	Basit şekillere ayrılan yüzeylerin alanlarını ( $A_1$ , $A_2$ ve $A_3$ ) hesapladınız mı?		
3	Basit şekillere ayrılan yüzeylerin ( $G_1$ , $G_2$ ve $G_3$ ) x ve y eksenlerine olan uzaklıklarının koordinatlarını hesapladınız mı?		
4	Basit şekillere ayrılan yüzeylerin x ve y eksenlerine olan uzaklıklarının koordinatları ile birleşik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatlarını hesapladınız mı?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

DEĞERLENDİRME					
Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	20	70	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:	Tarih	
				..... / ..... / .....	
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		



### HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Cisimlerin ve yapı elemanlarının geometrik şekillerini inceleyiniz.
- İncelediğiniz cisimlerin ve yapı elemanlarının ağırlık merkezleri ile ilgili gözlemlerinizi arkadaşlarınızla paylaşınız.

## 3.3. CİSİMLERİN VE YAPI ELEMANLARININ AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

Üç boyutlu sistemlerden oluşan cisimler çevrede sıkça görülmektedir. Eni, boyu ve yüksekliği olan tüm elemanlar cisim olarak adlandırılır. Örneğin yolda yürürken üzerine basılan kaldırım taşları, istinat duvarları ile ev, okul, hastane, iş hani, alışveriş merkezi gibi yapılarda görülen kolonlar, perde duvarlar, kirişler, döşemeler, merdiven basamakları vb. yapı elemanları da cisimdir.

Cisimlerin ağırlık merkezi hesaplarında kullanılan üç boyutlu cisimler; küp, dikdörtgenler prizması, silindir, küre, piramit, koni, üçgen prizma gibi geometrik cisimlerdir.

Yapı elemanlarının ağırlık merkezi hesaplarında ise kolon, kiriş, döşeme, merdiven basamağı, beton kütle, temel, istinat duvarı gibi yapı elemanlarının ağırlık merkezlerinin hesaplanmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

### 3.3.1. Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi Hesap Yöntemleri

Üç boyutlu cisimler aynı maddeden yapılmış ve kalınlıkları aynı ise ağırlıkları yerine hacimleri alınabilir. Eğer üç boyutlu cisim aynı maddeden oluşmuyorsa öz kütleleri ile de çarpımları sonucu ağırlıkları bulunur.

Kuvvet etkisi altındaki cisimlerin x, y, z eksenlerine göre toplam momentleri, bileşke ağırlığın bu eksenlere göre momentlerine eşittir. Bu durum parçaların ağırlık merkezi olarak adlandırılır. Kuvvet etkisi altındaki cisimlerin hareketini ise dinamik bilimi inceler. Bu durumlarda kütle merkezinin bulunduğu noktanın konumu belirlenmelidir. Konumun belirlenmesi ve ağırlık hesaplarında yer çekim ivmesi  $g = 9,81 \text{ m/sn}^2$  kullanılır. Ağırlık;  $W = m \cdot g$  bağıntısıyla hesaplanır.

Örneğin; kütlesi 100 kg olan bir cismin ağırlığı:  $W = m \cdot g$  bağıntısından;

$W = 100 \times 9,81 \Rightarrow W = 981 \text{ kgm/sn}^2$  olur. Bulunan ağırlık,  $W = 981 \text{ Newton}$  olarak da ifade edilebilir. Yapı elemanları da aynı maddeden üretilen yani homojen (betonarme, çelik, ahşap vb.) cisimlerdir. Cisimlerin ve yapı elemanlarının ağırlık merkezi hesaplarında hacim (V) ve koordinat düzleminde x, y, z eksenlerine olan uzaklıkları kullanılarak hesaplanır.

Binalarda inşa edilen kolon, kiriş, duvar, döşeme, merdiven, temel gibi yapı elemanları; istinat duvarı, baraj, bent gibi yapıların duvarlarının ağırlık merkezleri, atalet (eylemsizlik) momentleri hesaplanması, devrilme ve burkulma tahkiki hesaplarının yapılabilmesi açısından önem arz eder.

#### 3.3.1.1. Basit Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi

Yapı elemanları da (kolon, kiriş, döşeme, merdiven basamağı, duvarlar, menfezler vb.) tek başına düşünüldüğünde basit geometrik cisimlerdir. Kesitleri kare ve dikdörtgen şeklinde olan yapı elemanları dikdörtgenler prizması şeklinde cisimdir. Yapı elemanının kesiti dairesel ise silindir şeklinde bir cisimdir. Bu örnekleri diğer yapı elemanlarının geometrik şekillerine göre düşünülerek adlandırılabilir.

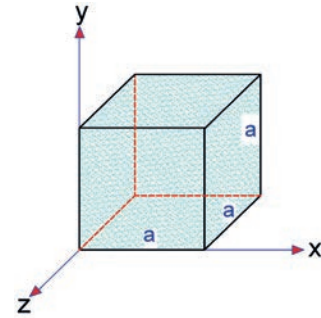
Cisimlerin ve cisim şeklinde olan yapı elemanlarının ağırlık merkezini ifade eden şekiller, hacimleri ve ağırlık aşağıda açıklanmıştır.

**Küpün (Kare Kesitli Yapı Kütleleri) Ağırlık Merkezi:** Küpün ağırlık merkezi x, y, z eksenleri üzerindeki uzunluklarının yarısı alınarak bulunur (Şekil 3.32).

$$G(x_g, y_g, z_g) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ şeklindedir.}$$

Küpün hacmi

$V = a^3$  formülüyle hesaplanır.



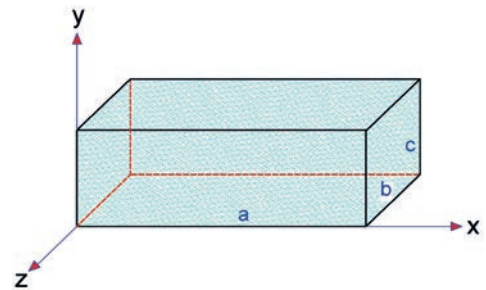
Şekil 3.32: Küpün x,y ve z eksenlerindeki ağırlık merkezi

**Dikdörtgenler (Dikdörtgen Kesitli Yapı Elemanları) Prizmasının Ağırlık Merkezi:** Dikdörtgenler prizmasının ağırlık merkezi x, y, z eksenleri üzerindeki uzunluklarının yarısı alınarak bulunur (Şekil 3.33).

$$G(x_g, y_g, z_g) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ şeklindedir.}$$

Dikdörtgenler prizmasının hacmi

$V = a.b.c$  formülüyle hesaplanır.



Şekil 3.33: Dikdörtgenler prizmasının x,y ve z eksenlerindeki ağırlık merkezi

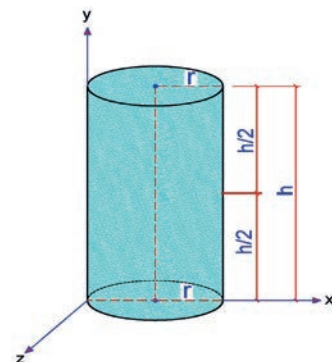
**Silindirin (Kesiti Dairesel Yapı Elemanları) Ağırlık Merkezi:**

Şekil 3.34'te verilen silindirin ağırlık merkezi koordinatları

$$G(x_g, y_g, z_g) = \left(r, \frac{h}{2}, r\right) \text{ şeklindedir.}$$

Silindirin hacmi

$V = \pi r^2.h$  formülüyle hesaplanır.



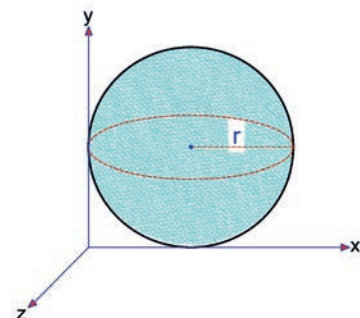
Şekil 3.34: Silindirin x, y ve z eksenlerindeki ağırlık merkezi

**Kürenin (Çelik Uzay Kafes Sistem Bağlantı Küreleri) Ağırlık Merkezi:**

Şekil 3.35'te verilen kürenin ağırlık merkezi koordinatları

$$G(x_g, y_g, z_g) = (r, r, r) \text{ şeklindedir.}$$

Kürenin hacmi;  $G = \frac{4}{3} \pi r^3$  formülüyle hesaplanır.



Şekil 3.35: Kürenin x, y ve z eksenlerindeki ağırlık merkezi



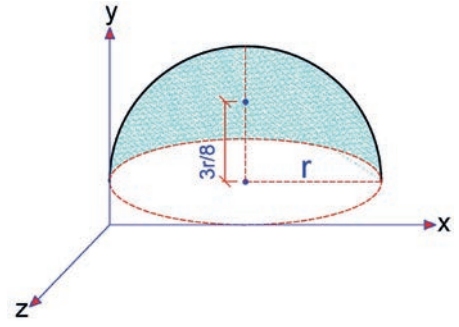
### Yarım Kürenin (Çelik Uzay Kafes Sistem Bağlantı Küreleri) Ağırlık Merkezi:

Şekil 3.36'da verilen kürenin ağırlık merkezi koordinatları

$$G(x_g, y_g, z_g) = \left(r, \frac{3r}{8}, r\right) \text{ şeklindedir.}$$

Yarım kürenin hacmi

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ formülüyle hesaplanır.}$$



Şekil 3.36: Yarım kürenin x, y ve z eksenlerindeki ağırlık merkezi

### 3.3.1.2. Birleşik Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi

Birleşik cisimlerin ağırlık merkezi  $G(x_g, y_g, z_g)$  koordinatları aşağıda verilen bağıntılarla hesaplanır.

$$x \text{ eksenine göre ağırlık merkezi apsisi: } x_g = \frac{\sum x \cdot V}{\sum V}$$

$$y \text{ eksenine göre ağırlık merkezi ordinatı: } y_g = \frac{\sum y \cdot V}{\sum V}$$

$$z \text{ eksenine göre ağırlık merkezi ordinatı: } z_g = \frac{\sum z \cdot V}{\sum V}$$

Birleşik cisimlerin ağırlık merkezi koordinatları olan  $x_g$ ,  $y_g$  ve  $z_g$  bağıntılarında verilen parametreler aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} \sum x \cdot V &= V_1 \cdot x_1 + V_2 \cdot x_2 + V_3 \cdot x_3 + \dots + V_n \cdot x_n \\ \sum y \cdot V &= V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2 + V_3 \cdot y_3 + \dots + V_n \cdot y_n \\ \sum z \cdot V &= V_1 \cdot z_1 + V_2 \cdot z_2 + V_3 \cdot z_3 + \dots + V_n \cdot z_n \\ \sum V &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \end{aligned}$$

### Pappus Guldin Teoremleri:

İsviçreli Matematikçi ve Astronom **Paul Guldin** tarafından ele alınarak geliştirilen **Guldin** kurallarıdır. Bu kurallar ile dönele simetrik cisimlerin manto alanı ve hacimlerinin basit hesapları yapılır.

MS 300 yıllarında İskenderiyeli Pappus tarafından keşfedilen; kendi düzleminde bir eksen etrafında dönen bir düzlem figürünün ürettiği hacmin ve yüzeyin hesaplanması, Paul Guldin'e atfedilerek **Centrobaric** teoremleri ile formüle edilmiştir. Bu nedenle Pappus veya Pappus Guldin kuralları olarak adlandırılmıştır.

#### 1. Kural

Bir düzlem eğrinin bir eksen etrafında dönmesi sonucu oluşan cismin manto (yüzey) alanı aşağıdaki basit yolla hesaplanır.

$$A_{\text{manto}} = 2\pi \cdot L \cdot d_1$$

**L:** Eğrinin uzunluğu

**d<sub>1</sub>:** Eğrinin ağırlık merkezinin eksene mesafesi

## 2. Kural

Bir düzlem alanın bir eksen etrafında dönmesi sonucu oluşan cismin hacmi aşağıdaki basit yolla hesaplanır.

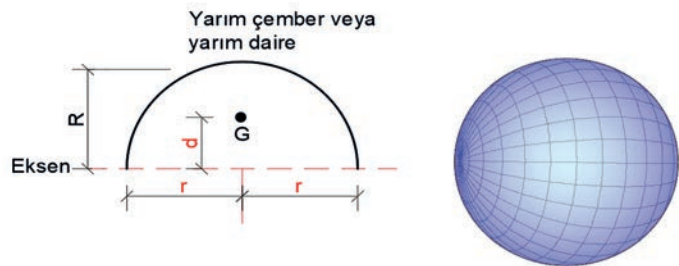
$$V = 2\pi \cdot A \cdot d_2$$

**A:** düzlem cismin alanı

**d<sub>2</sub>:** alanın ağırlık merkezinin eksene mesafesi



Yarım çemberin yayının eksenini etrafında döndürülmesi ile kürenin yüzey alanının bulunması:



Şekil 3.37: Döndürme ile elde edilen küre

$$L = \pi r \text{ (Yarım çember uzunluğu)}$$

$$d = d_1 = \frac{2r}{\pi} \text{ (Çemberin ağırlık merkezinin eksene mesafesi)}$$

$$A_{\text{Yüzey}} = 2\pi(\pi r) (2r/\pi) \Rightarrow A = 4\pi r^2 \text{ (Kürenin yüzey alanı, Şekil 3.37)}$$



Yarım dairenin eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan kürenin hacminin bulunması:

$$A = \pi r^2 / 2 \text{ (Yarım dairenin alanı)}$$

$$d = d_2 = \frac{4r}{3\pi} \text{ (Yarım dairenin ağırlık merkezinin eksene mesafesi)}$$

$$V = 2\pi(\pi r^2 / 2) (4r / 3\pi) \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ (Kürenin hacmi)}$$

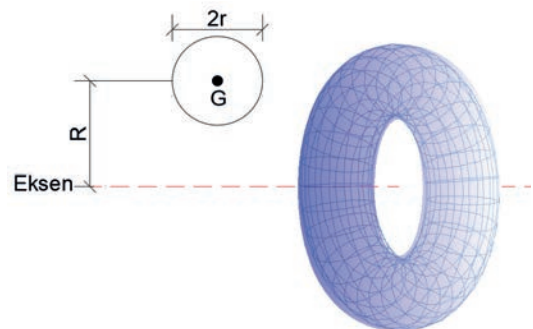


Bir çemberin eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan Torus'un yüzey alanı ve hacminin bulunması:

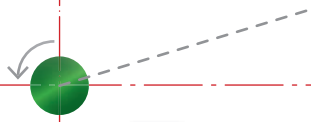
$$A_{\text{Yüzey}} = 2\pi \cdot L \cdot d_1 = 2\pi \cdot 2\pi r \cdot R \Rightarrow A_{\text{Yüzey}} = 4\pi^2 r R \text{ (Torus yüzey alanı)}$$

$$V = 2\pi \cdot \pi r^2 \cdot R \Rightarrow V = 2\pi^2 \cdot r^2 \cdot R \text{ (Torus hacmi, Şekil 3.38)}$$

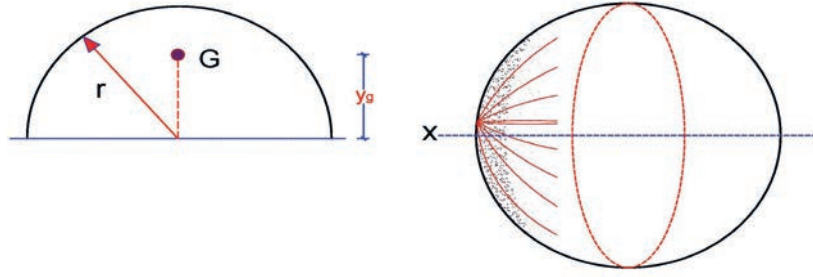
**Pappus-Guldinus Teoremleri**, bazı geometrik şekillerin ağırlık merkezlerinin bulunmasında kullanılan uygun bir yöntemdir.



Şekil 3.38: Eksen etrafında döndürme ile elde edilen torus



Şekil 3.39'da verilen yarım çember yayının ağırlık merkezinin koordinatlarının bulunması:



Şekil 3.39: Yarım çember yayının eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin ağırlık merkezi

Pappus-Guldinus teoremine göre

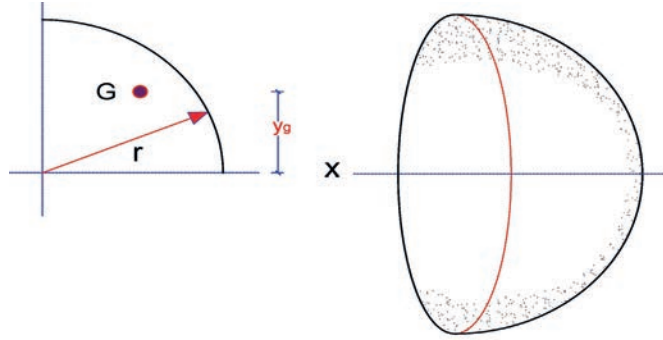
$$A = 2\pi \cdot L \cdot y_g$$

Şeklin x-x eksenini etrafında dönmesi sonucu küre oluşur ve bu kürenin yüzey alanı

$$A = 4\pi r^2 \text{ dir.} \quad 4\pi r^2 = 2\pi \cdot \pi r \cdot y_g \quad y_g = \frac{2r}{\pi}$$



Şekil 3.40'ta verilen dörtte bir (çeyrek) çember yayının ağırlık merkezi koordinatlarının bulunması:



Şekil 3.40: Çeyrek çember yayının eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin ağırlık merkezi

Şeklin x-x eksenini etrafında döndürülmesi ile yarım küre oluşur.

Pappus-Guldinus teoremine göre

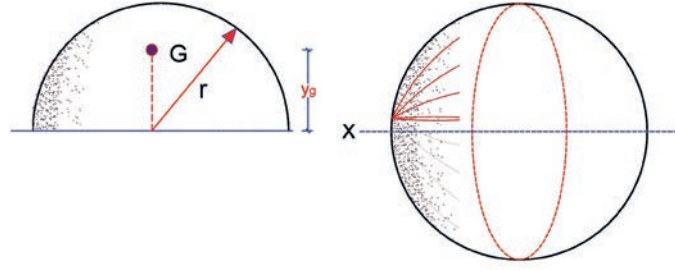
$$A = 2\pi \cdot L \cdot y_g$$

$$2\pi r^2 = 2\pi = \frac{1}{2} \pi r \cdot y_g$$

$y_g = \frac{2r}{\pi}$  bulunur. Şekil bir eğik simetri eksenini olduğundan  $x_g = y_g$  dir.



Şekil 3.41’de verilen yarım dairenin ağırlık merkezi koordinatlarının bulunması:



Şekil 3.41: Yarım dairenin ekseninde dördürülmesi ile oluşan cismin ağırlık merkezi

Pappus-Guldinus teoremine göre;

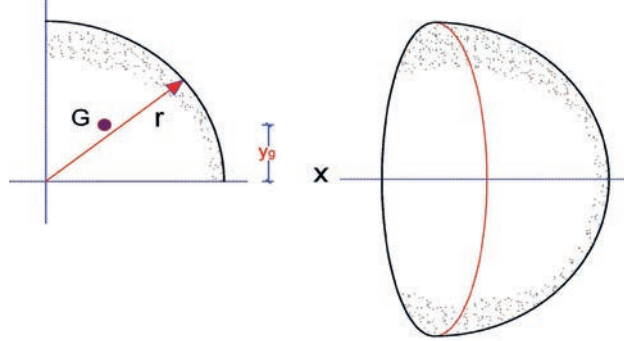
$$V = 2\pi \cdot A \cdot y_g$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot y_g$$

$$y_g = \frac{4r}{3\pi} \text{ bulunur.}$$



Şekil 3.42’de verilen çeyrek dairenin ağırlık merkezi koordinatlarının bulunması:



Şekil 3.42: Çeyrek dairenin ekseninde dördürülmesi ile oluşan cismin ağırlık merkezi

Pappus-Guldinus teoremine göre;

$$V = 2\pi \cdot A \cdot y_g \text{ ve } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{1}{4}\pi r^2 \cdot y_g$$

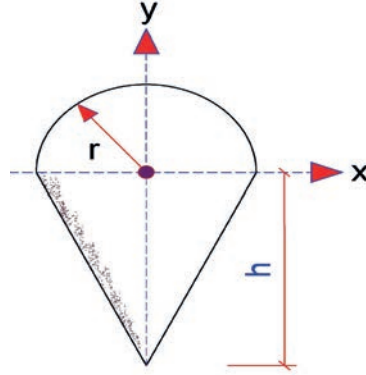
$$y_g = \frac{4r}{3\pi} \text{ bulunur. Şekil bir eğik simetri eksenine olduğundan } x_g = y_g \text{ dir.}$$



### 3.3.2. Birleşik Cisimlerin ve Yapı Elemanlarının Ağırlık Merkezi Hesapları

Cisimlerin ağırlık merkezleri ile ilgili hesaplar aşağıda verilmiştir.

**Problem:** Şekil 3.43'te verilen birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezinin x ekseninde olabilmesi için ikizkenar üçgenin yüksekliği (h) ne kadar olmalıdır.



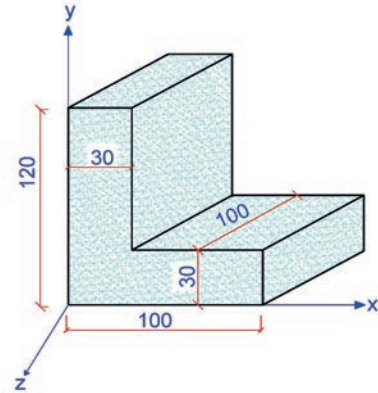
Şekil 3.43: İkizkenar üçgen ve yarım daireden oluşan birleşik yüzey

**Çözüm:** Yarım daire ve ikizkenar üçgenin alanlarına sırasıyla  $A_1$  ve  $A_2$ , ağırlık merkezlerinin x eksenine olan uzaklıkları  $y_1$  ve  $y_2$  olarak adlandırılırsa

$A_1 \cdot y_1 = A_2 \cdot y_2$  olmalıdır.

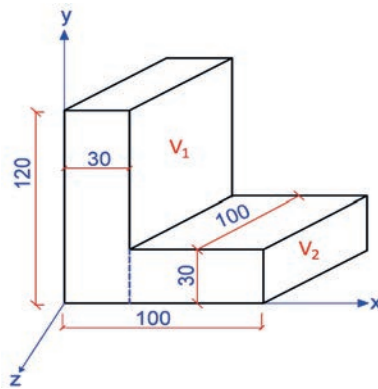
O halde  $\frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2r \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{2}$  şeklinde yazılır. Buradan **h = 1,41r** bulunur.

**Problem:** Şekil 3.44'te verilen birleşik geometrik cismin (perde duvar ve döşeme sistemi kesiti perspektif görünümü) ağırlık merkezi koordinatlarını bulunuz.



Şekil 3.44: Birleşik geometrik cisim

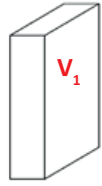
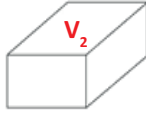
**Çözüm:** Şekil 3.44'te verilen birleşik geometrik cisim Şekil 3.45'te olduğu gibi basit geometrik cisimlere ayrılır.



Şekil 3.45:  $V_1$  ve  $V_2$  hacimli basit geometrik cisimlere ayrılması

Birleşik geometrik cisim Şekil 3.45'te olduğu gibi  $V_1$  ve  $V_2$  hacimlerinden,  $G_1$  ve  $G_2$  ağırlık merkezlerinden oluşan 2 dikdörtgen prizmasından oluşan hacimler elde edilir.

Ağırlık merkezi koordinat verileri pratik çözüm tablosuna aktarılır ve gerekli hesaplamalar yapılır.

Şekil No ve Adı	Şekil	V (Hacim)	x	y	z	V.x	V.y	V.z
(+) 1 no.lu cisim dikdörtgen prizması (Perde duvar)		360000	15	60	50	$54 \times 10^5$	$216 \times 10^5$	$180 \times 10^5$
(+) 2 no.lu cisim dikdörtgen prizması (Döşeme)		210000	65	15	50	$1365 \times 10^4$	$315 \times 10^4$	$105 \times 10^5$
$\Sigma$		$57 \times 10^4$				$1905 \times 10^4$	$2475 \times 10^4$	$285 \times 10^5$

$$x_g = \frac{\sum x.V}{\sum V} = \frac{19050000}{570000} \Rightarrow x_g = 33,42 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum y.V}{\sum V} = \frac{24750000}{570000} \Rightarrow y_g = 43,42 \text{ cm}$$

$$z_g = \frac{\sum z.V}{\sum V} = \frac{28500000}{570000} \Rightarrow z_g = 50 \text{ cm}$$

$G(x_g, y_g, z_g) = G(33,42; 43,42; 50)$  bulunur.

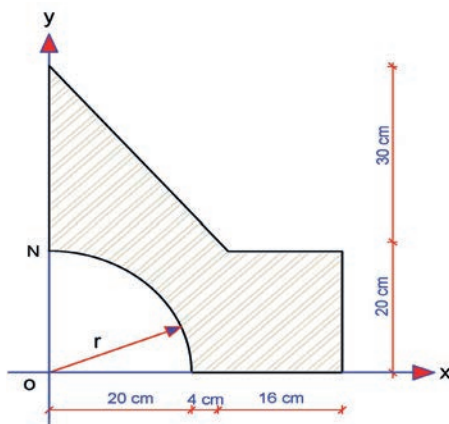
**Problem:** Şekil 3.46'da verilen birleşik geometrik yüzeyin x eksenine etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini ( $V_x$ ) ve y eksenine etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini ( $V_y$ ) hesaplayınız.

Ağırlık merkezi koordinatları:

$$G(x_g, y_g) = G(19,16; 19,06)$$

Birleşik geometrik yüzeyin toplam alanı:

$$\Sigma A = 846 \text{ cm}^2$$



Şekil 3.46: Birleşik geometrik yüzey

**Çözüm:** Birleşik geometrik yüzeyin ağırlık merkezinin koordinatları hesaplandıktan sonra yüzeyin x ve y eksenine etrafında döndürülmesi ile oluşacak dönel cisimlerin hacimleri olan  $V_x$  ve  $V_y$  Pappus Guldin Teoremi ile hesaplanır.

Ağırlık merkezi koordinatları:

$$G(x_g, y_g) = G(19,16; 19,06)$$

Birleşik geometrik yüzeyin toplam alanı:

$$\Sigma A = 846 \text{ cm}^2$$

Bu veriler doğrultusunda Pappus Guldin teoreminden:

$$V_x = 2\pi \cdot A \cdot y_g = 2 \times 3,14 \times 846 \times 19,06$$

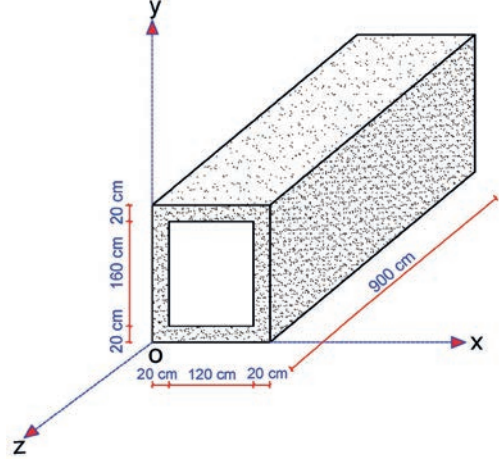
$$V_x = 101263,49 \text{ cm}^3$$

$$V_y = 2\pi \cdot A \cdot x_g = 2 \times 3,14 \times 846 \times 19,16$$

$$V_y = 101794,78 \text{ cm}^3$$

## SIRA SİZDE

Şekil 3.47’de ölçüleri verilen betonarme dikdörtgen kesitli kutu menfezin ağırlık merkezi koordinatlarını hesaplayınız?



Şekil 3.47: Kutu menfez

## 3.4. UYGULAMA BİRLEŞİK CİSİMLERİN AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

7 DERS SAATİ

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



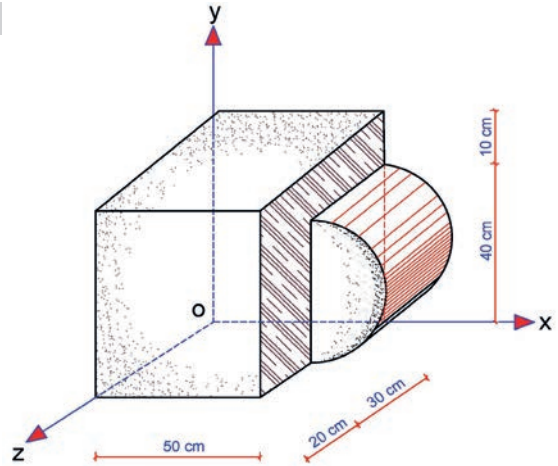
36148

Bu çalışmanın amacı, cisimlerin ağırlık merkezleri hesapları ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

Cisimlerin ağırlık merkezi hesap uygulamalarını, aşağıdaki işlem basamakları ve Şekil 3.48’de verilen birleşik geometrik cismin ölçülerini dikkate alarak öğretmeninizin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 3.48’de görülen birleşik geometrik cismin ağırlık merkezi koordinatlarını hesaplayınız.



Şekil 3.48: Küp ve yarım silindirden oluşan birleşik geometrik cisim



## Yönerge

- Çalışmanızda birleşik geometrik cismi basit geometrik şekillerden oluşan cisimlere ayırırken ölçüleri doğru almaya ve işlemleri hatasız yapmaya dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Uygulama kontrol listesinde bu ölçütleri daha net görebilirsiniz.

## İşlem Basamakları

- Şekil 3.48’de görülen küp ve yarım silindirin hacimleri hesaplanır.

Küpün hacmi:  $V_1 = a^3 = 50^3 = 125000 \text{ cm}^3$

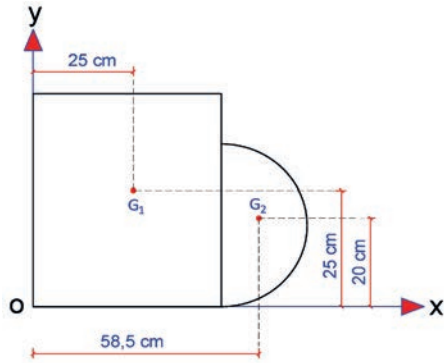
Yarım silindirin hacmi:  $v_2 = \frac{1}{2} \pi r^2 h = \frac{1}{2} \times 3,14 \times 20^2 \times 30 = 18840 \text{ cm}^3$

- Şekil 3.48’de verilen birleşik geometrik cismin sol yan ve üst görünüşleri Şekil 3.49 ve Şekil 3.50’de görüldüğü gibi ayrılarak çizilir.
- Ağırlık merkezlerinin x ve y eksenlerine olan uzaklıkları hesaplanarak görünüşler üzerinde gösterilir.

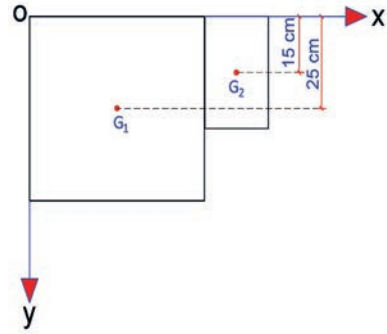
1 no.lu parça küp:  $x_1 = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$  ;  $y_1 = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$  ;  $z_1 = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$

2 no.lu parça yarım silindir:  $x_2 = 50 + \frac{4r}{3\pi} = 50 + \frac{4 \times 20}{3 \times 3,14} = 58,5 \text{ cm}$ ;  $y_2 = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}$ ;  $z_2 = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$

- Sol yan görünüş ve üst görünüş üzerinde ağırlık merkezlerinin yeri ve uzaklıkları gösterilir.



Şekil 3.49: Birleşik geometrik cismin sol yan görünüşü



Şekil 3.50: Birleşik geometrik cismin ön görünüşü

- Ağırlık merkezi koordinat verileri pratik çözüm tablosuna aktarılır ve gerekli hesaplamalar yapılır.

Şekil No ve Adı	Şekil	V (Hacim)	x	y	z	V.x	V.y	V.z
(+) 1 no.lu cisim küp		125000	25	25	25	3125000	3125000	3125000
(+) 2 no.lu cisim yarım silindir		18840	58,5	20	15	1102140	376800	282600
$\Sigma$		<b>143840</b>				<b>4227140</b>	<b>3501800</b>	<b>3407600</b>



- Birleşik cismin ağırlık merkezinin koordinatları statik momentlerin toplamlarının hacimlerin toplamına oranlanmasıyla hesaplanır.

$$x_g = \frac{\sum x.V}{\sum V} = \frac{4227140}{143840} \Rightarrow x_g = 29,39 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum y.V}{\sum V} = \frac{3501800}{143840} \Rightarrow y_g = 24,40 \text{ cm}$$

$$z_g = \frac{\sum z.V}{\sum V} = \frac{3407600}{143840} \Rightarrow z_g = 23,69 \text{ cm}$$

$$G(x_g, y_g, z_g) = G(29,39; 24,40; 23,69) \text{ bulunur.}$$

### UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için "Evet", kazanamadığınız beceriler için "Hayır" kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	Şekil 3.48'de görülen küp ve yarım silindirin hacimlerini hesapladınız mı?		
2	Şekil 3.48'de verilen birleşik geometrik cismin sol yan ve üst görünüşleri Şekil 3.49 ve Şekil 3.50'de görüldüğü gibi ayırarak çizdiniz mi?		
3	Ağırlık merkezlerinin x ve y eksenlerine olan uzaklıkları hesaplanarak görünüşler üzerinde gösterdiniz mi?		
4	Sol yan ve üst görünüş üzerinde ağırlık merkezlerinin yerini ve uzaklıklarını gösterdiniz mi?		
5	Ağırlık merkezi koordinatlarını hesaplayıp pratik çözüm tablosuna verileri aktarıp ve gerekli hesaplamaları yaptınız mı?		
6	Birleşik cismin ağırlık merkezinin koordinatlarını, statik momentlerin toplamları ile hacimlerin toplamına oranlayarak hesapladınız mı?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

### DEĞERLENDİRME

Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	20	70	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:	Tarih	
				..... / ..... / .....	
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		

## 3.5. UYGULAMA YAPI ELEMANLARININ AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

1 DERS SAATİ

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



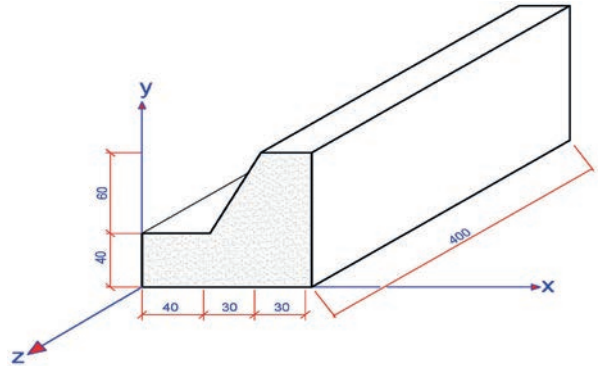
36149

Bu çalışmanın amacı, yapı elemanları ağırlık merkezleri hesapları ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

İstinat duvarı ağırlık merkezi hesap uygulamasını, aşağıdaki işlem basamakları ve Şekil 3.51'deki ölçüleri dikkate alarak öğretmeninizin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 3.51'de görülen istinat duvarının ağırlık merkezi koordinatlarını hesaplayınız.



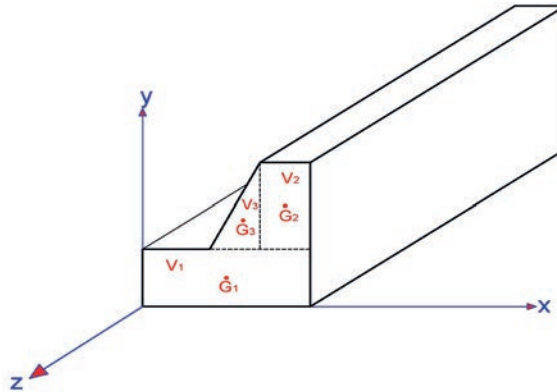
Şekil 3.51: İstinat duvarı

### Yönerge

- Çalışmanızda istinat duvarını oluşturan geometrik cisimlere ve ölçülerini doğru almaya dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Uygulama kontrol listesinde bu ölçütleri daha net görebilirsiniz.

### İşlem Basamakları

- Şekil 3.51'de görülen istinat duvarının ön görünüş yüzeyi üzerinde Şekil 3.52'de görüldüğü gibi geometrik şekillere ayrılır ve ağırlık merkezinin yerleri gösterilir.



Şekil 3.52: İstinat duvarının ön görünüş yüzeyinin geometrik şekillere ayrılması

- Şekil 3.52'de görülen istinat duvarının ön görünüş yüzeyi üzerinde 1 no.lu parça dikdörtgen kesitli olması nedeniyle dikdörtgenler prizması, 2 no.lu parça dikdörtgen kesitli olması nedeniyle dikdörtgenler prizması, 3 no.lu parça üçgen kesitli olduğundan üçgen prizmanın hacimleri hesaplanır.



1 no.lu cisim parçası dikdörtgenler prizmasının hacmi:  $V_1 = a.b.c = 40 \times 100 \times 400 = 1600000 \text{ cm}^3$

2 no.lu cisim parçası dikdörtgenler prizmasının hacmi:  $V_2 = a.b.c = 30 \times 60 \times 400 = 720000 \text{ cm}^3$

3 no.lu cisim parçası üçgen prizmanın hacmi:  $V_3 = \frac{1}{2}.a.b.L = \frac{1}{2} \times 30 \times 60 \times 400 = 360000 \text{ cm}^3$

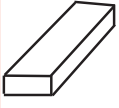
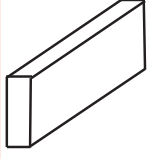
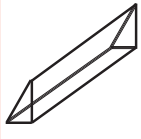
- Cisimlerin ağırlık merkezlerinin x, y ve z eksenlerine olan uzaklıkları hesaplanır.

1 no.lu parça dikdörtgen kesit:  $x_1 = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}$ ;  $y_1 = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}$ ;  $z_1 = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}$

2 no.lu parça dikdörtgen kesit:  $x_2 = 70 + \frac{30}{2} = 85 \text{ cm}$ ;  $y_2 = 40 + \frac{60}{2} = 70 \text{ cm}$ ;  $z_2 = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}$

3 no.lu parça üçgen kesit:  $x_3 = 40 + \frac{2 \times 30}{3} = 60 \text{ cm}$ ;  $y_3 = 40 + \frac{60}{3} = 60 \text{ cm}$ ;  $z_3 = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}$

- Ağırlık merkezi koordinatlarının hesabı pratik çözüm tablosuna veriler aşağıdaki gibi aktarılır ve gerekli hesaplamalar yapılır.

Şekil No ve Adı	Şekil	V (Hacim)	x	y	z	V.x	V.y	V.z
(+) 1 no.lu cisim dikdörtgenler prizması		1600000	50	20	200	$8 \times 10^7$	$32 \times 10^6$	$32 \times 10^7$
(+) 2 no.lu cisim dikdörtgenler prizması		720000	85	70	200	$612 \times 10^5$	$504 \times 10^5$	$144 \times 10^6$
(+) 3 no.lu cisim üçgen prizma		360000	60	60	200	$216 \times 10^5$	$216 \times 10^5$	$72 \times 10^6$
$\Sigma$		<b>2680000</b>				<b><math>1628 \times 10^5</math></b>	<b><math>104 \times 10^6</math></b>	<b><math>536 \times 10^6</math></b>

- Geometrik cisimlerden oluşan istinat duvarının ağırlık merkezinin koordinatları, statik momentlerin toplamının hacimlerin toplamına oranlanmasıyla hesaplanır.

$$x_g = \frac{\sum x.V}{\sum V} = \frac{162800000}{2680000} \Rightarrow x_g = 60,74 \text{ cm} \quad y_g = \frac{\sum y.V}{\sum V} = \frac{104000000}{2680000} \Rightarrow y_g = 38,81 \text{ cm}$$

$$z_g = \frac{\sum z.V}{\sum V} = \frac{536000000}{2680000} \Rightarrow z_g = 200 \text{ cm}$$

İstinat duvarı ağırlık merkezinin koordinatları:  $\mathbf{G(x_g, y_g, z_g) = G(60,74; 38,81; 200)}$  bulunur.



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için "Evet", kazanamadığınız beceriler için "Hayır" kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	İstinat duvarını ön görünüş yüzeyi üzerinde geometrik şekillere ayırıp ağırlık merkezi yerlerini gösterdiniz mi?		
2	İstinat duvarının 2 dikdörtgenler prizması ve 1 üçgen prizma parçasından oluşan hacimlerini hesapladınız mı?		
3	Cisimlerin ağırlık merkezlerinin x, y ve z eksenlerine olan uzaklıklarını hesapladınız mı?		
4	Ağırlık merkezi koordinatlarını pratik çözüm tablosuna verilerini aktarıp gerekli hesaplamaları yaptınız mı?		
5	Birleşik cismin ağırlık merkezinin koordinatlarını, statik momentlerin toplamları ile hacimlerin toplamına oranlayarak hesapladınız mı?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

DEĞERLENDİRME					
Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	20	70	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:	Tarih	
				..... / ..... / .....	
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		

## 3. ÖĞRENME BİRİMİ NOTLARIM

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

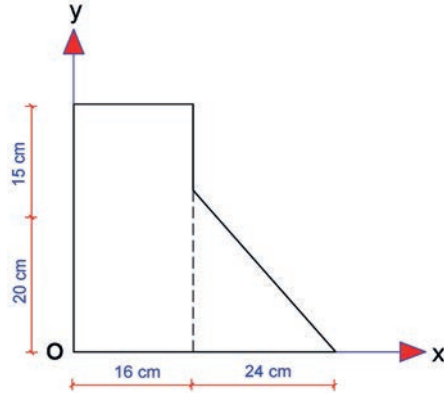
.....

Aşağıda verilen çoktan seçmeli test maddelerinden oluşan soruları cevaplayınız.

1. Bir cismi meydana getiren küçük parçacıklara etki eden yer çekimi kuvvetlerinin bileşkesinin, cisim üzerindeki uygulama noktasına o cismin ..... denir.

Yukarıda boşluk bırakılan noktalı yere aşağıdaki seçeneklerde verilenlerden hangisi gelmelidir?

- A) Denge merkezi  
B) Statik merkezi  
C) Ağırlık merkezi  
D) Yerçekimi kuvveti  
E) Dinamik merkezi
2. Şekilde verilen birleşik geometrik yüzeylerden oluşan şeklin ağırlık merkezi ( $x_g$ ,  $y_g$ ) koordinatlarını bulunuz.
- A) (6,66; 17,50)  
B) (12,80; 14,25)  
C) (13,46; 15,58)  
D) (20,25; 18,45)  
E) (27,48; 26,64)



3. Üçgenin ağırlık merkezi aşağıdaki seçeneklerin hangisinde doğru verilmiştir?
- A) Üçgenin orta noktası  
B) Üçgenin kenar noktaları  
C) Üçgenin açıortaylarının kesişim noktası  
D) Üçgenin kenarortaylarının kesişim noktası  
E) Üçgenin uzun kenarının orta noktası
4. Bir düzlem eğrinin bir eksen etrafında dönmesi sonucu oluşan cismin manto (yüzey) alanı aşağıda verilen hangi bağıntıyla hesaplanır?
- A)  $2\pi \cdot A \cdot d^2$   
B)  $2\pi^2 \cdot r^2 \cdot R$   
C)  $2\pi \cdot L \cdot d_1$   
D)  $2\pi^2 \cdot L \cdot d_2$   
E)  $2\pi \cdot L \cdot y_g$

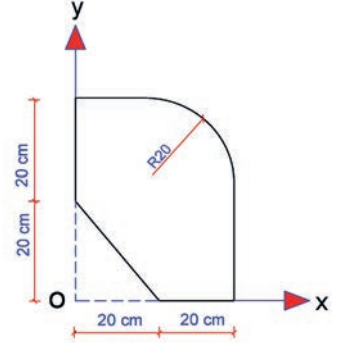
5. Düzlem bir yüzeyin ağırlık merkezinin bir eksene uzaklığı ile yüzeyin alanının çarpımına yüzeyin ..... denir.

Yukarıda boşluk bırakılan noktalı yere aşağıdaki seçeneklerde verilenlerden hangisi gelmelidir?

- A) Yerçekimi kuvveti  
B) Statik momenti  
C) Ağırlık merkezi  
D) Eğilme momenti  
E) Kesme kuvveti

6. Şekilde verilen birleşik geometrik yüzeylerden oluşan şeklin ağırlık merkezi ( $x_g, y_g$ ) koordinatlarını bulunuz. ( $\pi = 3,14$  alınacaktır.).

- A) (22,88; 23,61)  
B) (22,41; 22,41)  
C) (21,92; 22,22)  
D) (21,32; 21,32)  
E) (21,01; 21,01)



7. Kütleli 180 kg olan cismin ağırlığı kaç Newton'dur?

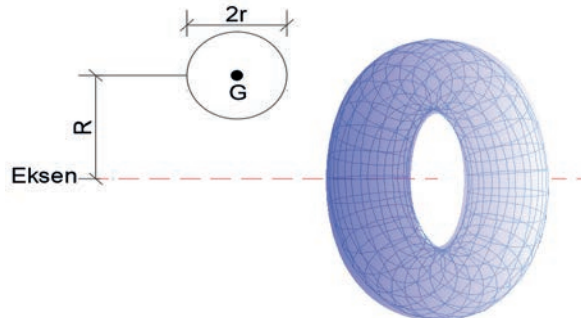
- A) 1800  
B) 1750,80  
C) 1795,30  
D) 1755,80  
E) 1785,95

8. Yüzey alanları toplamı  $4110 \text{ cm}^2$  olan birleşik bir yüzeyin x eksenine etrafında  $2\pi$  kadar döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi kaç  $\text{cm}^3$ tür? ( $\pi = 3,14$  alınacaktır.)

- A) 1207945  
B) 1128505  
C) 1108500  
D) 1004005  
E) 1000895

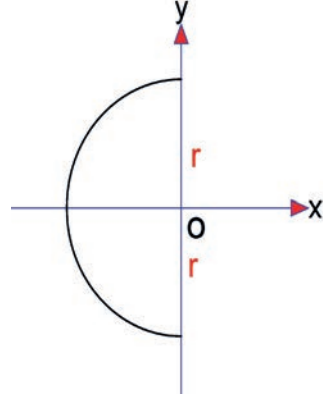
9. Şekilde görülen  $2r$  çaplı çemberin eksenine etrafında döndürülmesi ile torus oluşturulmuştur. Oluşan torusun hacmi aşağıdaki seçeneklerde verilen hangi bağıntı ile hesaplanır?

- A)  $4\pi^2 rR$   
B)  $2\pi \frac{1}{2} \pi r^2 y$   
C)  $2\pi \frac{1}{4} \pi r^2 y$   
D)  $2\pi Ay$   
E)  $2\pi^2 r^2 R$



10. Şekilde verilen yarım dairenin ağırlık merkezi  $(x_g, y_g)$  koordinatları hangi seçenekte doğru verilmiştir?

- A)  $(\frac{4r}{3\pi}, 0)$   
B)  $(0, \frac{4r}{3\pi})$   
C)  $(0, \frac{2r}{3\pi})$   
D)  $(\frac{2r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi})$   
E)  $(\frac{2r}{3\pi}, \frac{2r}{3\pi})$



Ölçme Değerlendirme sorularını cevaplamayı tamamladıysanız kitabın sonunda verilen cevap anahtarından cevaplarınızı kontrol edebilirsiniz. Yanlış cevapladığınız soruları öğretmeninize sorunuz.

110 - 112 - 122 - 155 - 156 - 177  
TEK NUMARADA BİRLEŞTİ!



# 4.

ÖĞRENME  
BİRİMİ

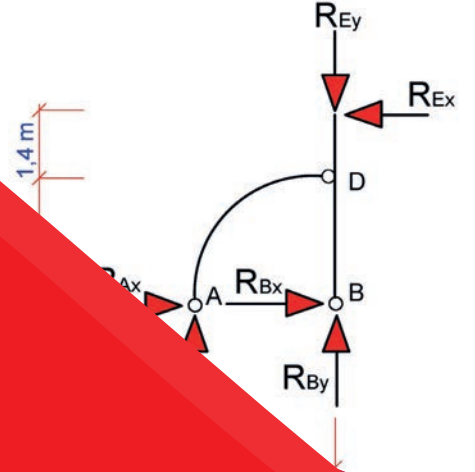
## MESNETLERDE - KİRİŞLERDE TEPKİ KUVVETLERİ VE DİYAGRAMLAR

### KONULAR

- 4.1. MESNETLERİN TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA
- 4.2. MESNETLERİN TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA UYGULAMASI
- 4.3. KİRİŞLERİN MESNET TEPKİLERİNİ HESAPLAMA
- 4.4. BASİT VE ÇIKMALI KİRİŞLERDE TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA UYGULAMASI
- 4.5. ÇERÇEVE VE KEMER SİSTEMİ KİRİŞLERİNDE TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA UYGULAMASI
- 4.6. KİRİŞLERDE KUVVET DİYAGRAMINI ÇİZME
- 4.7. KİRİŞLERDE KUVVET DİYAGRAMINI ÇİZME UYGULAMASI

### NELER ÖĞRENECEKSİNİZ ?

- Mesnetlerin Tepki Kuvvetlerini Hesaplama
- Kolon ve Temel Sistemlerinde Mesnet Tipi Seçimi
- Mesnetlerin Tepki Kuvvetlerini Hesaplama Uygulamaları
- Kirişlerin Mesnet Tepkilerini Hesaplama
- Kirişlerde Tepki Kuvvetleri Hesaplama Uygulamaları
- Kirişlerde Kuvvet Diyagramlarını Çizme
- Kirişlerde Kuvvet Diyagramları Çizme Uygulamaları



### TEMEL KAVRAMLAR

kiriş kesme kuvveti diyagramı çizimi, kiriş mesnet tepkisi hesaplama, kiriş moment diyagramı çizimi, kiriş normal kuvvet diyagram çizimi, kiriş tepki kuvveti hesapları, mesnet tepkisi, mesnet tipleri





## HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Yapı elemanlarında kullanılan mesnet türlerini inceleyiniz ve bu mesnetlerin listesini oluşturunuz.
- Yapı elemanlarını etkileyen yükleri araştırınız ve bunları sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.

## 4.1. MESNETLERİN TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA

Bir yapıya etki eden iç ve dış kuvvetleri güvenlik sınırları içinde taşıyan ve elemanları aracılığı ile bu kuvvetleri zemine aktaran sistemlere **taşıyıcı sistemler** denir. Taşıyıcı sistemler; bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu sistemler olmak üzere üç sınıfta toplanabilir. Bir boyutlu sistemler çubuk sistemlerdir. Çubuk sistemler dolu gövdeli veya kafes sistemi şeklinde olabilir. İki boyutlu sistemler, orta yüzeyi düzlem şeklinde olanlar levha ve plak, eğriliği orta yüzeyi olanlar ise kabuk olarak adlandırılır. Üç boyutlu sistemler ise üç boyutu da aynı önemde olan uzay kafes sistem gibi olan sistemlerdir.

Bu öğrenme biriminde; bir boyutlu dolu gövdeli çerçeve, kemer ve kafes sistemlerinin mesnet tepkilerini ve bu sistemleri etkileyen yükler altındaki normal kuvvet, kesme kuvvetleri ve eğilme momenti davranışlarını ifade eden diyagramların çizilmesine değinilecektir.

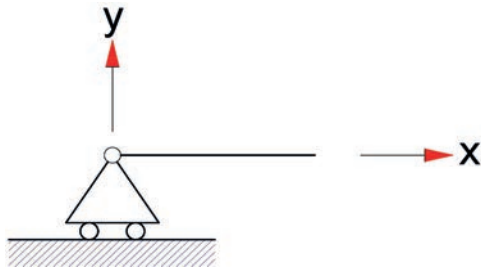
Taşıyıcı sistemlerin dış ortamla birleştiği noktalara **mesnet** denir. Mesnetlerde oluşan tepki kuvvetleri dış kuvvetlerdir. Bu kuvvetler doğrudan doğruya belirgin değildir. Mesnet tepki kuvvetleri diğer dış kuvvetlere bağlı olarak denge denklemleri yardımıyla hesaplanabilir.

### 4.1.1. Mesnet ve Mesnet Tepkisi Çeşitleri

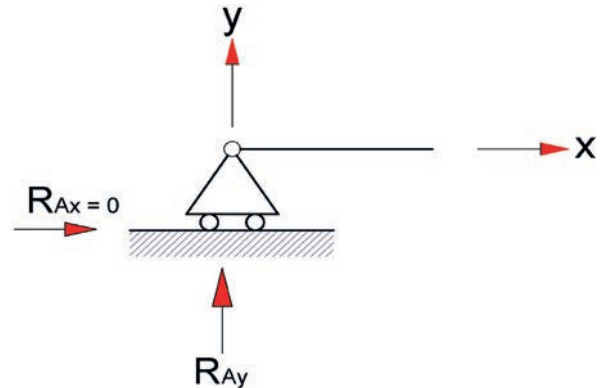
#### Yapı Kirişleri, Döşemeleri ve Kafes Kirişlerde Mesnetler

**Kayıcı (Hareketli) Mesnetler:** Sadece bilinmeyen bir reaksiyon sağlar ve hareket yönüne pozitif bir açı ile etki eder. Böylece kayıcı mesnetler, bir doğrultuda lineer harekete ve dönmeye olanak sağlar. Kirişlerde hareketli mesnet gösterimi Şekil 4.1'de görülmektedir.

Hareketli mesnetlerde, mesnedin yatay yönde hareket kabiliyeti olduğu statik olarak kabul edildiğinden tepki kuvveti yatayda oluşmaz. Bu nedenle hareketli mesnetleri etkileyen kuvvet düşeyde oluşur. Kuvvetlerin gösterimi Şekil 4.2'de görülmektedir.

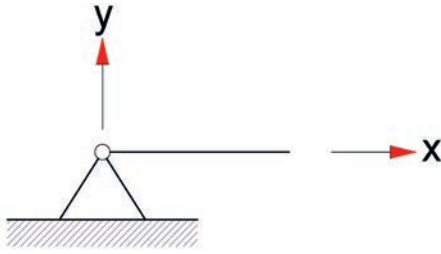


Şekil 4.1: Hareketli (kayıcı) mesnet



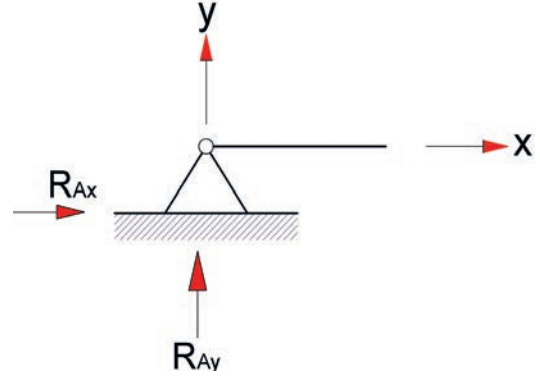
Şekil 4.2: Hareketli (kayıcı) mesnetlerde tepki kuvvetleri

**Sabit Mesnetler:** Tek noktada sabitlenmiş mesnetler yatay ve düşeyde iki reaksiyon (tepki) verir. Bu nedenle iki yönde cismin hareketine engel olur. Fakat dönmeyi sağlar. Kirişlerde sabit mesnet gösterimi Şekil 4.3'te görülmektedir.



Şekil 4.3: Sabit mesnet

Sabit mesnetlerde tepki kuvvetleri yatayda ve düşeyde oluşur. Sabit mesnetlerde tepki kuvvetleri gösterimi Şekil 4.4'te görülmektedir.



Şekil 4.4: Sabit mesnetlerde tepki kuvvetleri

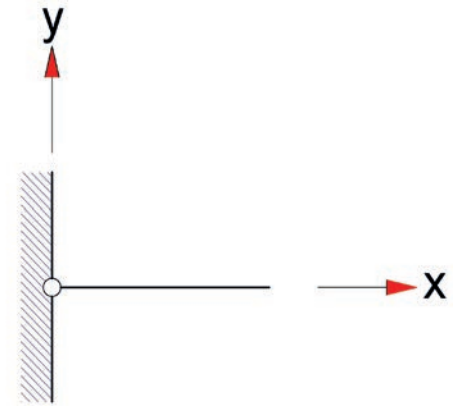
**Ankastre Mesnetler:** Kirişin mesnetlemenin en kısıtlayıcı yolu, sabit mesnet (ankastre mesnet) kullanmaktır. Bu mesnet, kirişin hem ötelenmesine hem de dönmeye engel olur. Kirişlerde ankastre mesnet gösterimi Şekil 4.5'te görülmektedir.

Bu durumda, mesnette x ve y yönlerinde kuvvetler ve z ekseninde doğrultusunda (moment ekseninde) moment oluşacaktır. Kuvvet mafsallı mesnette olduğu gibi  $R_{Ax}$  ve  $R_{Ay}$  bileşenleri ile ifade edilir, bu kuvvetler biliniirse açısı da kolaylıkla bulunur.

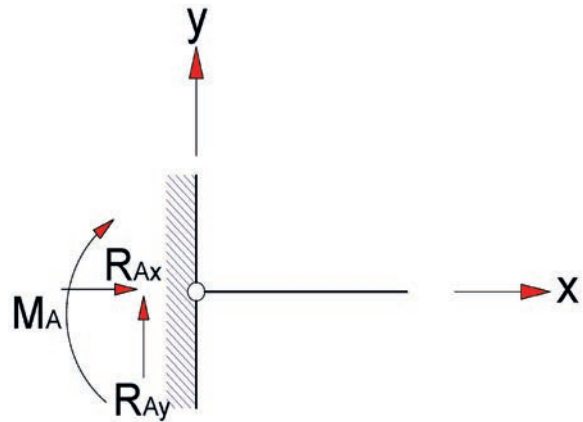
Kirişin bir noktadan her yöndeki hareketi sınırlanmıştır. Ankastre kirişlerde yatay, düşey ve eğilme momenti kuvveti şeklinde oluşur. Ankastre mesnet tepki kuvvetleri Şekil 4.6'da görülmektedir.

Sabit mesnetler, hareketli mesnetler ve ankastre mesnetler; dolu gövdeli kirişlerde, kemerlerde, çerçeve sistemlerde, kafes kiriş sistemlerinde ve düşey taşıyıcı sistemlerde tasarlanır.

Yukarıda bahsedilen mesnet türleri dışında, üzerine kuvvet etkimeyen iki ucu mafsallı doğru eksenli çubuk olan pandül ayaklar ve dönme etkisini önlemek için elastik ankastre mesnetler kullanılmaktadır.



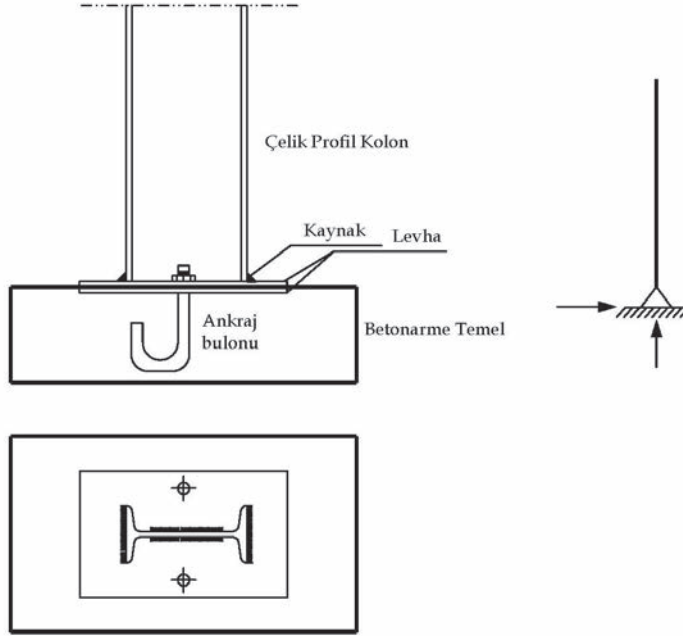
Şekil 4.5: Ankastre mesnet



Şekil 4.6: Ankastre mesnetlerde tepki kuvvetleri

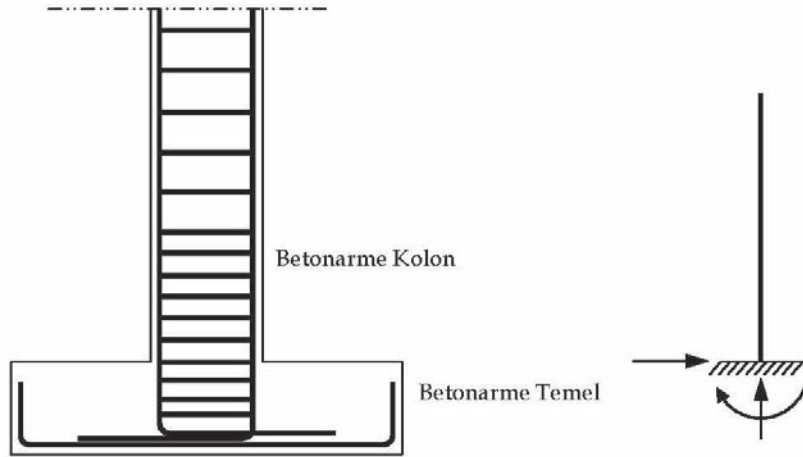
## Kolon ve Temel Sistemlerinde Mesnet Tipi Seçimi

Şekil 4.7'de görülen sistemde sadece yatay ve düşey yer değiştirmeler önlenebilir. Fakat kolon ve temel birleşim bölgesinde dönmeler engellenemeyeceği için basit sabit mesnet olarak modellenir.



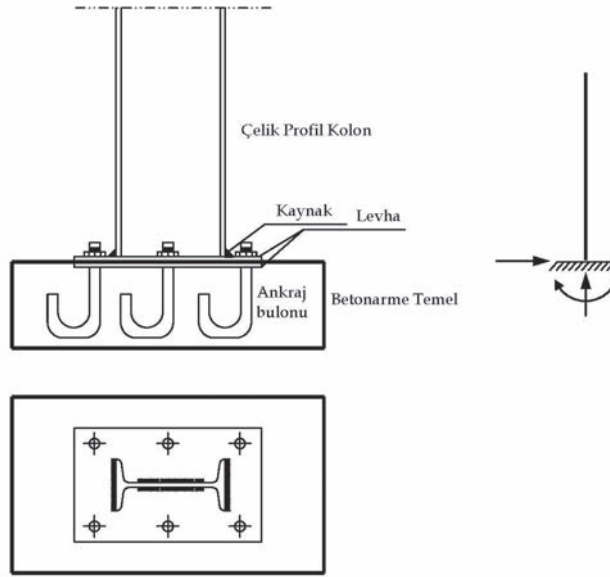
Şekil 4.7: Çelik kolon-temel birleşiminde, sabit mesnet modellemede tepki kuvvetleri

Şekil 4.8'de görülen sistemde yatay ve düşey yer değiştirmeler ile kolon ve temel birleşim bölgesinde dönmeler engellenebileceği için ankastre mesnet olarak modellenir.



Şekil 4.8: Betonarme kolon-temel birleşiminde ankastre mesnet modellemesi tepki kuvvetleri

Şekil 4.9'da görülen sistemde yatay ve düşey yer değiştirmeler ile kolon ve temel birleşim bölgesinde dönmeler engellenebileceği için ankastre mesnet olarak modellenir.



Şekil 4.9: Çelik kolon-temel birleşiminde ankastre modellemede mesnet tepki kuvvetleri

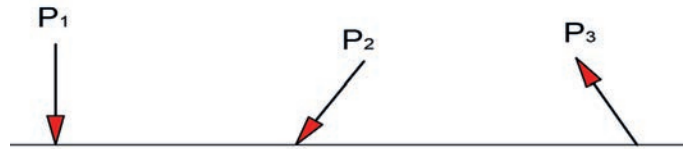
#### 4.1.2. Taşıyıcı Sistemleri ve Mesnetleri Etkileyen Yükler

Belirlenme durumlarına göre dış kuvvetler ikiye ayrılır. Bunlar; doğrudan doğruya belli olan dış kuvvetler ve mesnet tepkileri veya bağ kuvvetleridir. Doğrudan doğruya belli olan dış kuvvetler ya da yükler, bilinen veya yapının fonksiyonuna göre yük yönetmelikleriyle saptanmış yüklerdir. Mesnet tepkileri ya da bağ kuvvetleri yapının taşıyıcı sistemini etkileyen kuvvetlere karşı olan yapı sisteminin tepki kuvvetleridir.

Bir taşıyıcı sistemin elemanlarına etki eden dış kuvvetler yayılış biçimlerine ve belirlenme durumlarına göre ikiye ayrılır. Yayılış biçimlerine göre dış kuvvetler tekil kuvvet olabilir veya belli bir değişim kuralı ile yayılı biçimde etki eder.

Tekil kuvvetlerin etkileri düşey, yatay veya açısallarda olabilir. Düşey yüklerin etkileri kesme kuvvetlerini, yatay kuvvetler normal kuvvetleri, açısalları ise hem kesme hem de normal kuvvet olarak etki eder (Şekil 4.10).

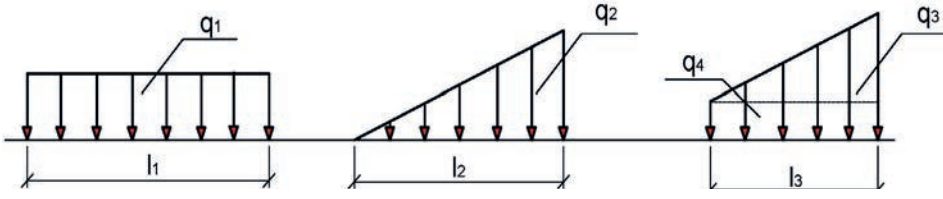
Yayıllı kuvvetler (yükler) doğrusal veya alansal olabilir. Tek boyutlu taşıyıcı bir sistemin elemanlarına etki eden yayılı yükler doğrusal, iki boyutlu taşıyıcı bir sisteme etki edenler ise alansaldır. Birinci tür yayılı yük birim boya etkiyen kuvvet ( $\text{kg/m}$ ,  $\text{t/m}$ ,  $\text{N/m}$  vb.), ikinci tür yayılı yük birim alana etkiyen kuvvet ( $\text{kg/m}^2$ ,  $\text{t/m}^2$ ,  $\text{N/m}^2$  vb.) boyutundadır.



Şekil 4.10: Düşey ve açısallı tekil yükler

Her noktada eşit olan yayılı yüklere düzgün yayılı yük denir. Yayılı yükler aynı zamanda üçgen, yamuk, dairesel, parabolik vb. şekillerde olabilir. Yayılı yükler diyagramla gösterilir. Yük diyagramının alanı, yayılı yükün yerine geçen tekil yükü verir.

Denge problemlerinde yayılı yükler yerine eşdeğer tekil yükler alınarak çözüm yapılır. Eşdeğer tekil yükün tesir çizgisi, yayılı yük diyagramının ağırlık merkezinden geçer ve yönü yayılı yükle aynı olur. Yayılı yükler genellikle düzgün yayılı yük, üçgen yayılı yük ve trapez yayılı yük şeklinde yapı elemanına etki eder (Şekil 4.11). Bunların dışında yapı elemanlarını etkileyen parabol yayılı yük türü de bulunmaktadır.



Şekil 4.11(a, b, c): Düzgün yayılı, üçgen yayılı ve trapez yayılı yük

Şekil 4.11.a'da görülen düzgün yayılı yük tekil yüke:  $Q_1 = q_1 \cdot l_1$

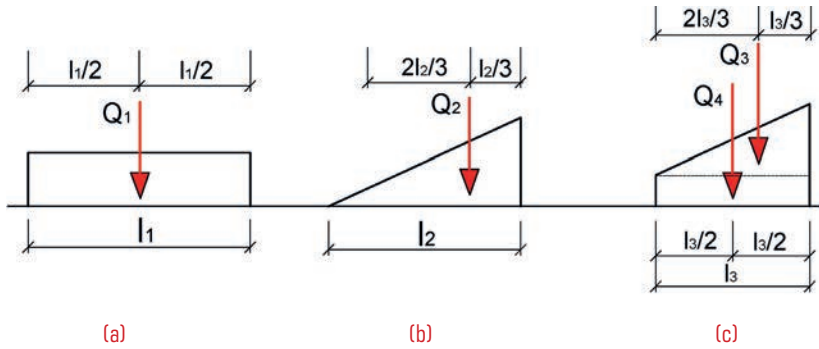
Şekil 4.11.b'de görülen üçgen yayılı yük tekil yüke:  $Q_2 = \frac{q_2 \cdot l_2}{2}$  bağıntılarıyla çevrilir.

Şekil 4.11.c'de görülen trapez yayılı yük Şekil 4.11'de görüldüğü gibi üçgen ve düzgün yayılı yüklerden oluşmaktadır.

Üçgen yayılı yük tekil yüke:  $Q_3 = \frac{q_3 \cdot l_3}{2}$

Düzgün yayılı yük tekil yüke:  $Q_4 = q_4 \cdot l_3$  bağıntılarıyla çevrilir.

Şekil 4.11(a, b, c)'de verilen yayılı yükler tekil yüklerle dönüştürülürken kuvvetlerin ağırlık merkezlerine etki noktaları Şekil 4.12(a, b, c) gösterildiği gibi olur.



Şekil 4.12(a, b, c): Düzgün, üçgen ve trapez yayılı yüklerin tekil yüke çevrilmesi

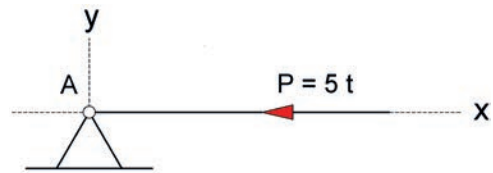
### 4.1.3. Mesnetlerin Tepki Kuvvetlerini Hesaplama Yöntemleri

Yapı kirişlerinin, döşemelerinin ve kafes kirişlerin oturdukları mesnetleri etkileyen yüklerin etkisi altında mesnet tepkileri denge denklemleri ve çizim yöntemi (Kuvvetler Üçgeni Yöntemi, Kuvvetler Çokgeni Yöntemi) ile bulunur.

#### 4.1.3.1. Mesnetlerin Tepki Kuvvetlerini Hesaplama

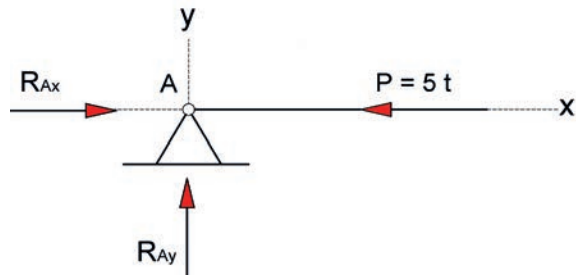
Mesnetlerin tepki kuvvetlerini hesaplama ile ilgili problemler aşağıda verilmiştir. Problem çözümlerinde **soldan sağa yönde olan kuvvetler (+), sağdan sola yönde olan kuvvetler (-), yukarı yönde olan kuvvetler (+), aşağı yönde olan kuvvetler (-), eğilme momentinde saatin yönünde etki eden kuvvetler (+) ve saatin tersi yönünde olan kuvvetler (-)** kabul edilecektir.

**Problem:** Şekil 4.13'te verilen yapı kirişinin oturduğu sabit mesnedi etkileyen kuvvet görülmektedir. Verilen yükleme durumuna göre A sabit mesnedinde oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



Şekil 4.13: Yatay kuvvet etkisi altındaki sabit mesnet

**Çözüm:** Yapı kirişinin oturduğu sabit mesnedin tepki kuvvetleri yatayda ve düşeyde oluşacaktır. Sabit mesnet tepki kuvvetleri Şekil 4.14'te olduğu gibi gösterilir.



Şekil 4.14: Yatay kuvvet etkisi altındaki sabit mesnet tepki kuvvetleri

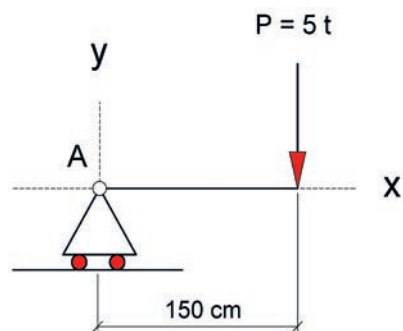
$\sum P_x = 0$  ise denge denkleminde hareketle yatay yöndeki kuvvetler doğrultusunda A mesnedindeki yatay tepki kuvveti

$$R_{Ax} - P = 0 \Rightarrow R_{Ax} - 5 = 0 \text{ buradan da } R_{Ax} = 5 \text{ t bulunur.}$$

$\sum P_y = 0$  ise denge denkleminde hareketle düşey yönde herhangi bir kuvvet olmadığından A mesnedindeki düşey tepki kuvveti

$$R_{Ay} = 0 \text{ olur.}$$

**Problem:** Şekil 4.15'te verilen yapı kirişinin oturduğu hareketli mesnedi etkileyen kuvvet görülmektedir. Verilen yükleme durumuna göre A hareketli mesnedinde oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



Şekil 4.15: Düşey kuvvet etkisi altındaki hareketli mesnet

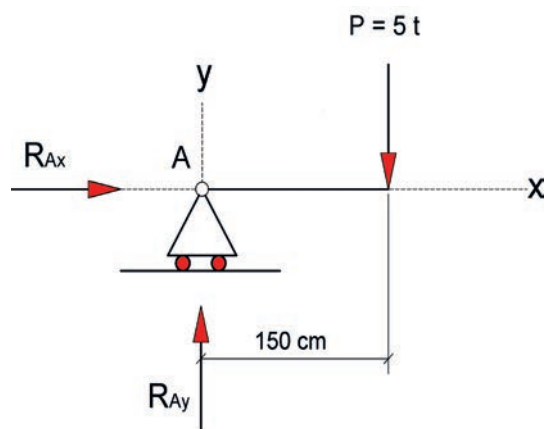
**Çözüm:** Yapı kirişinin oturduğu sabit mesnedin tepki kuvvetleri yatayda ve düşeyde oluşacaktır. Hareketli A mesnedinde tepki kuvvetleri Şekil 4.16'da olduğu gibi gösterilir.

$\sum P_x = 0$  ise denge denkleminde hareketli mesnette yatay yönde A mesnedinde tepki kuvveti sıfır olur. Buradan hareketle

$$R_{Ax} = 0 \text{ olur.}$$

$\sum P_y = 0$  ise denge denkleminde hareketle düşey yöndeki kuvvetler doğrultusunda A mesnedindeki düşey tepki kuvveti

$$R_{Ay} - 5 = 0 \text{ buradan da } R_{Ay} = 5 \text{ t bulunur.}$$



Şekil 4.16: Düşey kuvvet etkisi altındaki hareketli mesnet tepki kuvvetleri

**Problem:** Şekil 4.17’de verilen yapı kirişinin oturduğu ankastre mesnedi etkileyen kuvvet görülmektedir. Verilen yükleme durumuna göre A ankastre mesnedinde oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

**Çözüm:** Yapı kirişinin oturduğu sabit mesnedin tepki kuvvetleri yatayda, düşeyde ve eğilme momenti şeklinde oluşacaktır. Ankastre A mesnedinde tepki kuvvetleri Şekil 4.18’de olduğu gibi gösterilir.

$\Sigma P_x = 0$  denge denkleminde ankastre mesnette yatay yönde kuvvet olmadığından A mesnedindeki yatay tepki kuvveti

$R_{Ax} = 0$  olur.

$\Sigma P_y = 0$  denge denkleminde hareketle düşey yöndeki kuvvetler doğrultusunda A mesnedindeki düşey tepki kuvveti;

$R_{Ay} - 200 = 0$  buradan da  $R_{Ay} = 200 \text{ kg}$  bulunur.

$\Sigma M_A = 0$  denge denkleminde hareketle

$M_A + P \cdot 0,60 = 0$  olmalıdır.  $M_A + 200 \times 0,60 = 0$  olur. Buradan da  $M_A = - 120 \text{ kgm}$  olur.

**Problem:** Şekil 4.19’da verilen yapı kirişinin oturduğu sabit mesnedi etkileyen düzgün yayılı kuvvet görülmektedir. Verilen yükleme durumuna göre A sabit mesnedinde oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

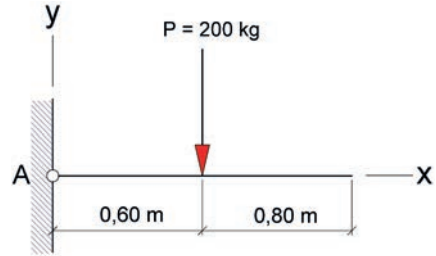
**Çözüm:** Yapı kirişinin oturduğu sabit mesnedin tepki kuvvetleri yatayda ve düşeyde oluşacaktır. A sabit mesnedinde tepki kuvvetleri ve düzgün yayılı yükün tekil yüke çevrilmesi Şekil 4.20’de olduğu gibi gösterilir.

$\Sigma P_x = 0$  denge denkleminde sabit mesnette yatay yönde kuvvet olmadığından A mesnedindeki yatay tepki kuvveti

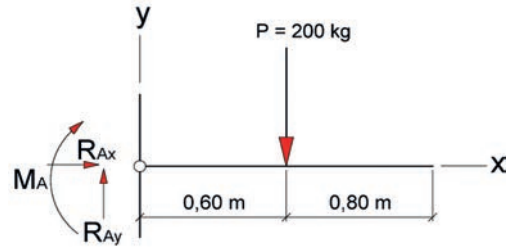
$R_{Ax} = 0$  olur.

$\Sigma P_y = 0$  denge denkleminde hareketle düşey yöndeki kuvvetler doğrultusunda A mesnedindeki düşey tepki kuvveti

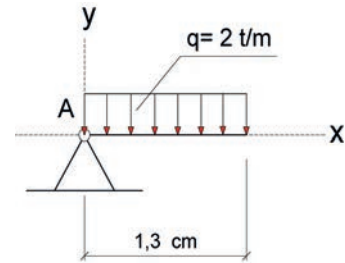
$R_{Ay} - Q = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 2,6 = 0$  buradan da  $R_{Ay} = 2,6 \text{ t}$  bulunur.



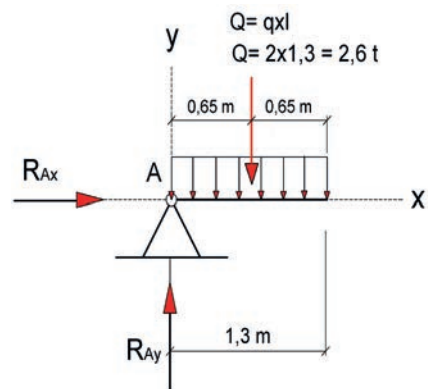
Şekil 4.17: Düşey kuvvet etkisi altındaki ankastre mesnet



Şekil 4.18: Düşey kuvvet etkisi altındaki ankastre mesnet tepki kuvvetleri



Şekil 4.19: Düzgün yayılı yük etkisi altındaki sabit mesnet

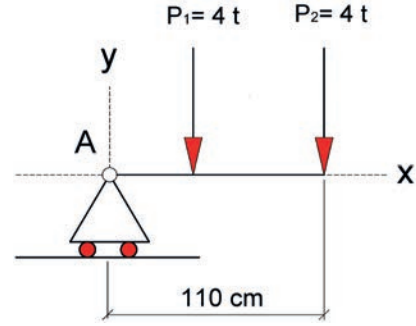


Şekil 4.20: Düzgün yayılı yük altındaki sabit mesnedin tepkileri



## SIRA SİZDE

Şekil 4.21'de verilen yapı kirişinin oturduğu sabit mesnedi etkileyen düşey tekil kuvvetler görülmektedir. Verilen şekil üzerinde A mesnedinde oluşan tepki kuvvetlerini göstererek çiziniz ve yükleme durumuna göre A sabit mesnedinde oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız?



Şekil 4.21: Düşey tekil kuvvetler etkisi altındaki hareketli mesnet

## 4.2. UYGULAMA

## MESNETLERİN TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA

6 DERS SAATİ

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



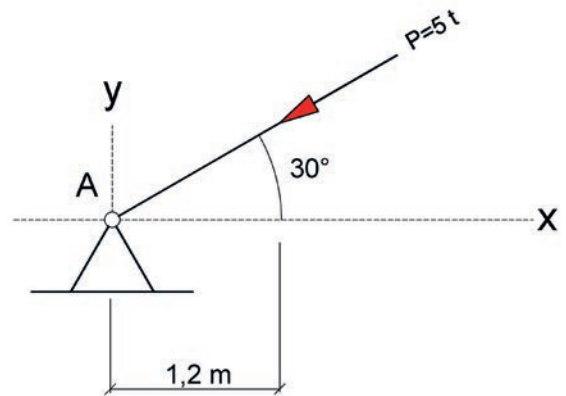
36150

Bu çalışmanın amacı, mesnetlerin tepki kuvvetlerini hesaplama ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

Mesnetlerin tepki kuvvetleri uygulamasını, işlem basamaklarına göre öğretmenin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 4.22'de A sabit mesnedi açısız yük etkisi altında olduğuna göre A mesnedinin tepki kuvvetlerini hesap yöntemiyle bulunuz.
- Şekil 4.22'de A sabit mesnedi açısız yük etkisi altında olduğuna göre A mesnedinin tepki kuvvetlerini kuvvet ölçeği: 1 t = 1 cm olarak çizim yöntemiyle bulunuz.



Şekil 4.22: Açısız yük etkisi altındaki sabit mesnet



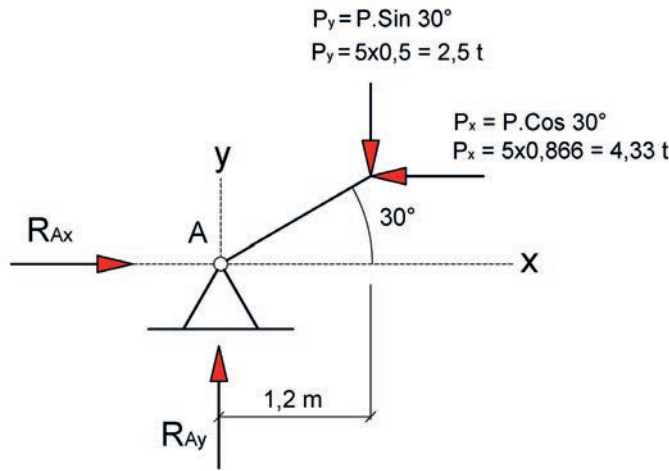
## Yönerge

- Çalışmanızda kuvvetlerin yönlerine dikkat ediniz.
- Verilen açısall yükün yatay ve düşey bileşenlerini hesaplarırken işlem hatası yapmamaya dikkat ediniz.
- Çizim yöntemiyle mesnet tepkilerinin bulunmasında kuvvet ölçeğine uygun olarak kuvvetin yatayla olan açısını doğru çizmeye dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde daha net görebilirsiniz.

## İşlem Basamakları

### Hesap Yöntemi

- Şekil 4.22’de verilen A sabit mesnet sistemi çizilir (Şekil 4.23).
- Şekil 4.22’de verilen A sabit mesnedini etkileyen açısall tekil kuvvet, yatay ( $P_x$ ) ve düşey ( $P_y$ ) bileşenlere ayrılarak çizilir (Şekil 4.23).
- Yatay ve düşey bileşenleri ayrılan açısall kuvvetin yatay ve düşey bileşenleri hesaplanır (Şekil 4.23).
- Açısall kuvvetin mesnede olan etkisi nedeniyle mesnedin gösterdiği tepki kuvvetleri ( $R_{Ax}$  ve  $R_{Ay}$ ) çizilerek gösterilir (Şekil 4.23).



Şekil 4.23: Açısall yük etkisi altındaki sabit mesnet tepki kuvvetleri ve kuvvetin bileşenleri

- $\sum P_x = 0$  denge denklemi ile A sabit mesnedindeki yatay tepki kuvveti bulunur.  
 $R_{Ax} - P_x = 0$  ise  $R_{Ax} - 4,33 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 4,33 \text{ t}$  olur.
- $\sum P_y = 0$  denge denklemi ile A sabit mesnedindeki düşey tepki kuvveti bulunur.  
 $R_{Ay} - P_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 2,5 = 0$  buradan da  $R_{Ay} = 2,5 \text{ t}$  bulunur.



### BİLGİ KUTUSU

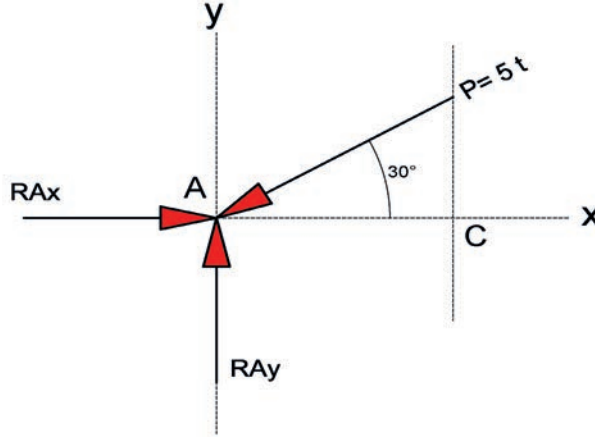
Mesnetlerin yatay ve düşey tepki kuvvetleri hesaplanırken mesnet türüne ve mesnedi etkileyen yük türüne dikkat edilmeli ve hesaplamalarda hassas olunmalıdır.



### Çizim Yöntemi (Kuvvetler Üçgeni Yöntemi, Kuvvetler Çokgeni Yöntemi)

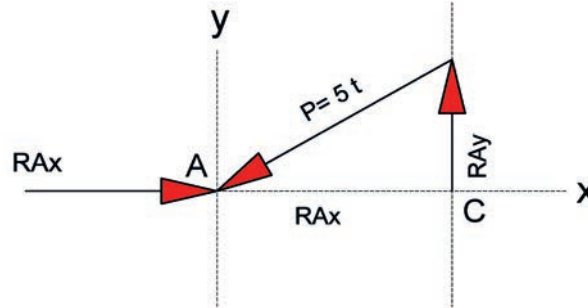
Çizim yönteminde kuvvet sayısı 3 ise kuvvetler üçgeni yöntem kuvvet sayısı 3'ten fazla ise kuvvetler çokgeni yöntemi kullanılır.

- A mesnedini etkileyen  $P = 5$  tonluk kuvvet, kuvvet ölçeği 1 ton 1 cm olacak şekilde 5 cm uzunluğunda x eksenine  $30^\circ$  açıyla gönye ve açıölçer yardımıyla çizilir.
- $R_{Ax}$  tepki kuvveti x eksenine A noktasına P kuvvetinin ucuna gelecek şekilde çizilir.
- $R_{Ay}$  tepki kuvveti y eksenine dik konumda yukarı yönde çizilir (Şekil 4.24).



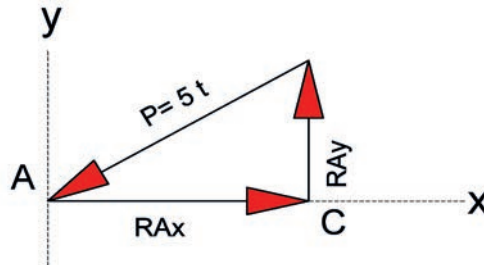
Şekil 4.24: Açısal yük etkisi altındaki sabit mesnet tepki kuvvetlerinin ve açısız kuvvetin çizimi

- $R_{Ay}$  düşey tepki kuvveti C noktasında P kuvvetinin başlangıç noktasına taşınarak çizilir (Şekil 4.25).



Şekil 4.25:  $R_{Ay}$  düşey kuvvetinin C noktasına taşınması

- $R_{Ax}$  yatay tepki kuvveti A noktasından C noktasına,  $R_{Ay}$  düşey kuvveti başlangıç noktasına taşınarak çizilir ve kuvvetler üçgeni oluşturulur (Şekil 4.26).



Şekil 4.26:  $R_{Ax}$  yatay tepki kuvvetinin A noktasından C noktasına taşınarak çizimi

- Şekil 4.26'da çizilen  $R_{Ax}$  yatay tepki kuvveti ve  $R_{Ay}$  düşey tepki kuvveti uzunlukları cetvelle ölçülür ve kuvvet ölçeği ile çarpılarak bulunur.

$R_{Ax}$  = Çizilen uzunluk x Kuvvet ölçeği

$$R_{Ax} = 4,3 \times 1 = 4,3 \text{ t}$$

$R_{Ay}$  = Çizilen uzunluk x Kuvvet ölçeği

$$R_{Ay} = 2,5 \times 1 = 2,5 \text{ t}$$



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için “Evet”, kazanamadığınız beceriler için “Hayır” kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
<b>Hesap Yöntemi</b>			
1	A sabit mesnet sistemini ve açılal kuvveti çizdiniz mi?		
2	A Sabit mesnedini etkileyen açılal kuvveti, yatay ( $P_x$ ) ve düşey ( $P_y$ ) bileşenlerine ayrıarak çizdiniz mi?		
3	Yatay ve düşey bileşenlerine ayrılan açılal kuvvetin yatay ve düşey bileşenlerini hesapladınız mı?		
4	Açılal kuvvetin mesnede olan etkisi nedeniyle mesnedin gösterdiği tepki kuvvetlerini ( $R_{Ax}$ ve $R_{Ay}$ ) çizerek gösterdiniz mi?		
5	$\sum P_x = 0$ denge denklemleri ile A sabit mesnedindeki yatay tepki kuvvetini buldunuz mu?		
6	$\sum P_y = 0$ denge denklemleri ile A sabit mesnedindeki düşey tepki kuvvetini buldunuz mu?		
<b>Çizim Yöntemi (Kuvvetler Üçgeni)</b>			
1	A sabit mesnedini etkileyen $P = 5$ tonluk kuvveti, kuvvet ölçeği ile 1 ton = 1 cm olacak şekilde 5 cm uzunluğunda x eksenine $30^\circ$ açıyla çizdiniz mi?		
2	$R_{Ax}$ tepki kuvvetini x ekseninde A noktasına P kuvvetinin ucuna gelecek şekilde çizdiniz mi?		
3	$R_{Ay}$ tepki kuvvetini y eksenine dik konumda yukarı yönde çizdiniz mi?		
4	$R_{Ay}$ düşey tepki kuvvetini C noktasında P kuvvetinin başlangıç noktasına taşıyarak çizdiniz mi?		
5	$R_{Ax}$ yatay tepki kuvvetini A noktasından C noktasına $R_{Ay}$ düşey kuvvetinin başlangıç noktasına taşıyarak çizip kuvvetler üçgenini oluşturduunuz mu?		
6	Şekil 4.25'te çizilen $R_{Ax}$ yatay tepki kuvveti ve $R_{Ay}$ düşey tepki kuvveti uzunluklarını cetvelle ölçüp ve kuvvet ölçeği ile çarparak buldunuz mu?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

## DEĞERLENDİRME

Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	30	60	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:	Tarih	
				..... / ..... / .....	
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		



### HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

Yapılarda tasarlanan izostatik, hiperstatik sistem örneklerini inceleyiniz ve bunları sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.

## 4.3. KİRİŞLERİN MESNET TEPKİLERİNİ HESAPLAMA

Bu öğrenme biriminde; izostatik dolu gövdeli sistemlerin, üç mafsallı çerçevelerin, kemerlerin, Gerber kirişlerinin ve kafes sistemlerin mesnet tepkileri ile bu sistemleri etkileyen yükler altında normal kuvvet, kesme kuvvetleri ve eğilme momenti kuvvet diyagramlarının çizilmesine değinilecektir.

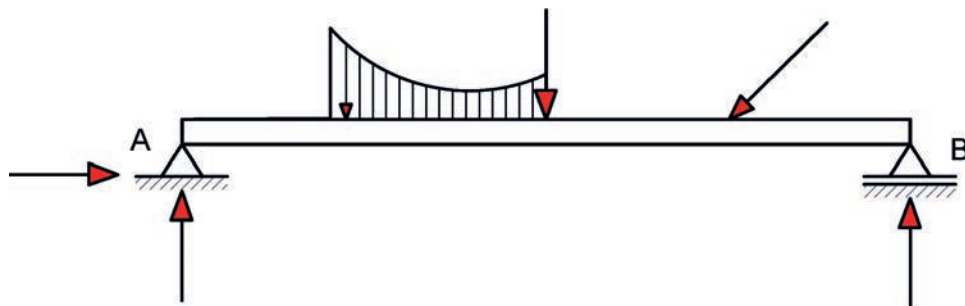
Mesnet tepkilerinin denge denklemleri ile hesaplanabildiği sistemlere **izostatik** veya **statikçe belirli sistemler** denir. İzostatik kirişlerde mesnetlerin tepki kuvvetleri de denge denklemleri yardımıyla hesaplanır. Mesnet ve bağ kuvvetlerinin hesabında denge denklemlerine ek olarak başka bağıntılar da gerektiren sistemlere ise **hiperstatik sistemler** denir. Hiperstatik sistemler; denge denklemleri ve ek olarak başka bağıntılar içerdiğinden, bilinmeyenler sadece üç denge denklemi kullanılarak çözülemez.

### 4.3.1. İzostatik Kirişlerde Mesnet Tepkilerini Hesaplama Yöntemleri

İzostatik kirişlerde mesnet tepkileri; denge koşullarıyla ve çizim yöntemiyle kullanılarak hesaplanır. Denge koşulları ile çizim yöntemlerine birinci ve ikinci öğrenme birimlerinde değinilmiştir. Bu öğrenme biriminde; denge koşulları ile dolu gövdeli izostatik kirişlerin, üç mafsallı izostatik sistemlerin, kemerlerin, Gerber kirişlerinin ve kafes kirişlerin mesnet tepkileri hesaplarına değinilecektir.

### 4.3.2. Dolu Gövdeli İzostatik Taşıyıcı Sistemlerde Mesnet Tepkileri Hesaplama

Dolu gövdeli izostatik sistemler; basit kirişler, çıkmalı kirişler ve konsol kirişlerdir. Bu sistemlerin mesnet tepkileri denge koşulları kullanılarak hesaplanır (Şekil 4.27, Şekil 4.28, Şekil 4.29).

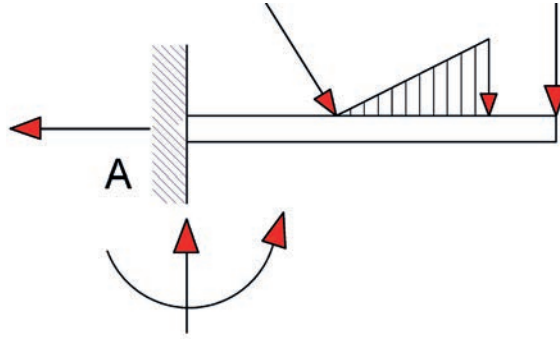


Şekil 4.27: Basit kiriş, etkileyen yükler ve mesnet tepkileri

Bir mesnedi sabit, diğer mesnedi hareketli olan doğru eksenli sistemlere **basit kiriş** denir.

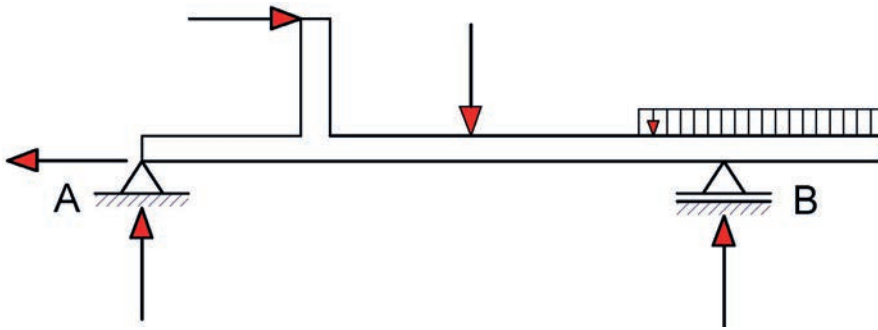


Bir ucu ankastre diğ er ucu ise boş ta olan kiriş lere **konsol kiriş** denir.



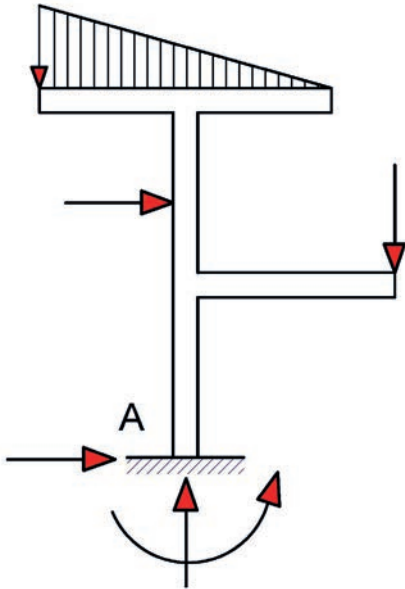
Ş ekil 4.28: Konsol kiriş

Bir veya iki ucunda çıkması bulunan kiriş lere **ç ıkmalı kiriş** denir.

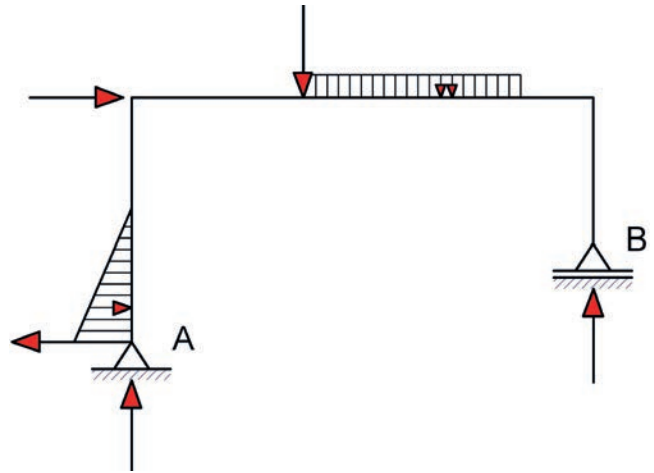


Ş ekil 4.29: Ç ıkmalı kiriş

Basit kiriş ler, konsol kiriş ler ve ç ıkmalı kiriş ler diş inde kolon ve kiriş lerden oluş an izostatik ç erç evelerinde mesnet tepkileri, denge koş unları kullanılarak hesaplanır (Ş ekil 4.30, Ş ekil 4.31).

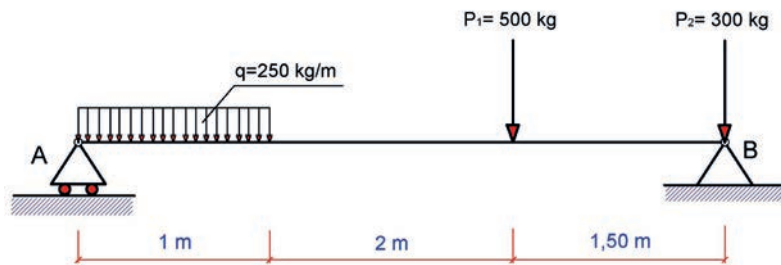


Ş ekil 4.30: Konsol ç erç eve sistemi



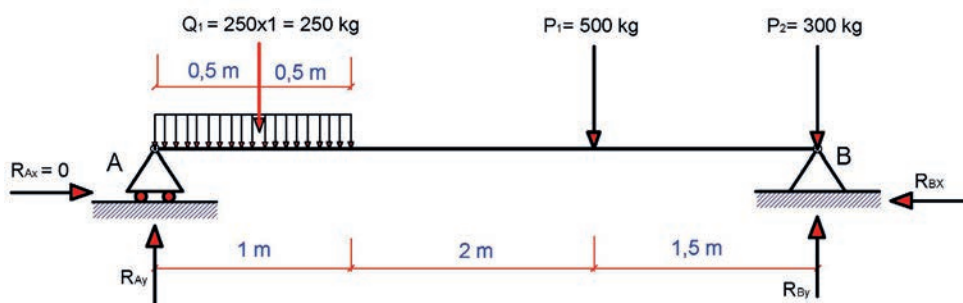
Ş ekil 4.31: Ç erç eve sistemi

**Problem:** Şekil 4.32’de basit kirişin yükleme durumu verilmiştir. Verilenlere göre A ve B mesnetlerindeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



Şekil 4.32: Yükleme durumu verilen basit kiriş

**Çözüm:** Düzgün yayılı yük tekil yüke çevrilir; mesnetlerde oluşan tepki kuvvetleri ve basit kiriş sistemi, tekil yükler çizilerek gösterilir (Şekil 4.33).



Şekil 4.33: Basit kirişe etki eden yayılı yükün tekil yüke çevrilmesi ve mesnet tepkileri

Şekil 4.33'te mesnet tepkileri ve düzgün yayılı yükün tekil yüke çevrilmiş durumuna göre denge denklemleri yazılırsa

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan A mesnedi hareketli mesnet olduğundan yatay tepki kuvveti oluşmaz, yani  $R_{Ax} = 0$  olur.

$$R_{Ax} - R_{Bx} = 0 \text{ ise } 0 - R_{Bx} = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 0 \text{ olur.}$$

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan A mesnedi sabit mesnet olduğundan düşey tepki kuvveti yazılırsa

$$R_{Ay} - Q_1 - P_1 - P_2 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 250 - 500 - 300 + R_{By} = 0 \text{ ise } R_{Ay} + R_{By} = 1050 \text{ kg iki bilinmeyenli denklem bulunur.}$$

$\sum M_A = 0$  denge koşulu doğrultusunda A noktasına göre moment alınır. Saat yönündeki kuvvetlerin moment etkisi (+), saatin tersi yönünde (-) kabul edilirse

$$\begin{aligned} R_{Ax} \cdot 0 + R_{Ay} \cdot 0 + Q_1 \cdot 0,5 + P_1 \cdot 3 - R_{By} \cdot 4,5 + P_2 \cdot 4,5 &= 0 \\ 0 + 0 + 250 \cdot 0,5 + 500 \cdot 3 - R_{By} \cdot 4,5 + 300 \cdot 4,5 &= 0 \\ 125 + 1500 - 4,5R_{By} + 1350 &\Rightarrow 2975 - 4,5R_{By} = 0 \Rightarrow 4,5R_{By} = 2975 \text{ olur.} \end{aligned}$$

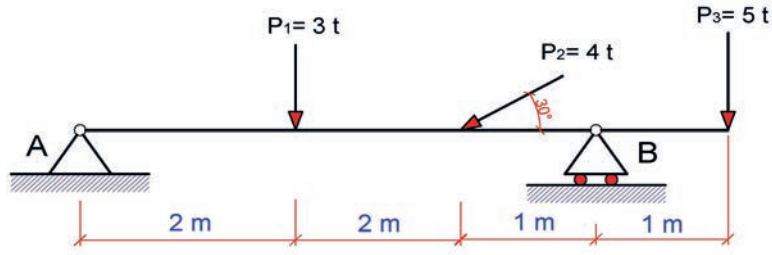
Buradan da  $4,5R_{By} = 2975$  olacaktır. Eşitliğin her iki tarafı 4,5'e bölünürse

$$R_{By} = \frac{2975}{4,5} \text{ ve } R_{By} = 661,11 \text{ kg olur.}$$

Düşey kuvvetlerin denge koşulundan bulunan  $R_{Ay} + R_{By} = 1050 \text{ kg}$  iki bilinmeyenli denklemde RBy denklemde yerine konursa

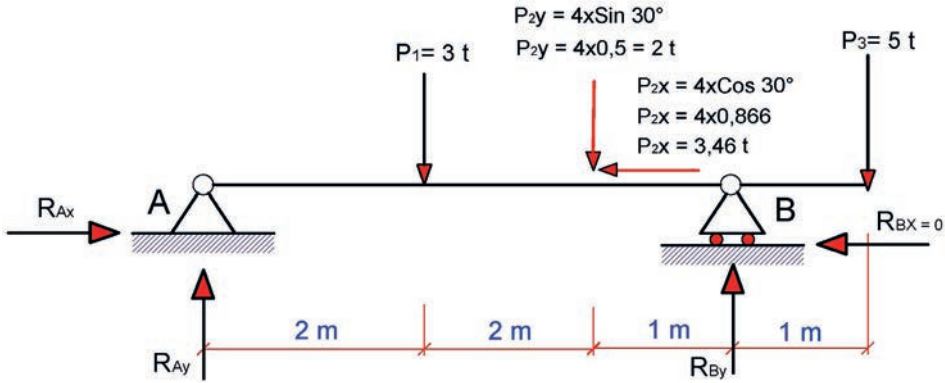
$$R_{Ay} + 661,11 = 1050 \text{ kg} \Rightarrow R_{Ay} = 1050 - 661,11 \text{ ve buradan da } R_{Ay} = 388,89 \text{ kg bulunur.}$$

**Problem:** Şekil 4.34 çıkmalı kirişin yükleme durumu verilmiştir. Verilenlere göre A ve B mesnetlerindeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



Şekil 4.34: Yükleme durumu verilen çıkmalı kiriş

**Çözüm:** A mesnedindeki mesnet tepkileri ve açılal kuvvet yatay ve düşey tekil kuvvetler Şekil 4.35'teki gibi çizilerek gösterilir.



Şekil 4.35: Çıkmalı kirişin mesnet tepkileri ve açılal kuvvetin tekil hâle çevrilmesi

Şekil 4.35'te verilenlere göre denge denklemleri yazılırsa

$$\sum P_x = 0$$

B mesnedi hareketli mesnet olduğundan yatay tepki kuvveti oluşmaz yani  $R_{Bx} = 0$  olur.

$$R_{Ax} - P_{2x} - R_{Bx} = 0 \text{ ise } R_{Ax} - 3,46 - 0 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 3,46 \text{ t olur.}$$

$$\sum P_y = 0$$

$R_{Ay} - P_1 - P_{2y} - P_3 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 3 - 2 - 5 + R_{By} = 0$  buradan da  $R_{Ay} + R_{By} = 10 \text{ t}$  iki bilinmeyenli denklemi bulunur.

$\sum M_A = 0$  denge koşulu doğrultusunda A noktasına göre moment alınır. Saat yönündeki kuvvetlerin moment etkisi (+), saatin tersi yönünde (-) kabul edilirse

$$R_{Ax} \cdot 0 + R_{Ay} \cdot 0 + P_1 \cdot x_1 + P_{2y} \cdot x_2 - R_{By} \cdot 5 + P_3 \cdot 6 = 0$$

$$0 + 0 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - R_{By} \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 0$$

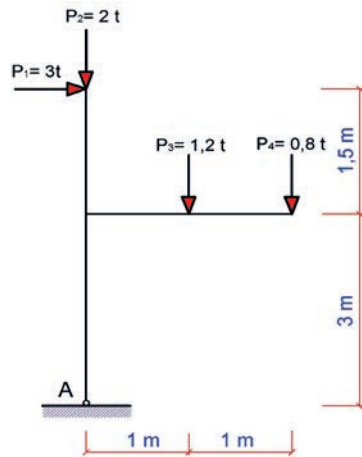
$$6 + 8 - 5R_{By} + 30 \Rightarrow 44 - 5R_{By} = 0 \Rightarrow -5R_{By} = -44 \text{ olur.}$$

Buradan da  $5R_{By} = 44$  olacaktır. Eşitliğin her iki tarafı 5'e bölünürse  $R_{By} = \frac{44}{5}$  ve  $R_{By} = 8,8 \text{ t}$  olur.

Düşey kuvvetlerin denge koşulundan bulunan  $R_{Ay} + R_{By} = 10 \text{ t}$  iki bilinmeyenli denklemde  $R_{By}$  denklemde yerine konursa

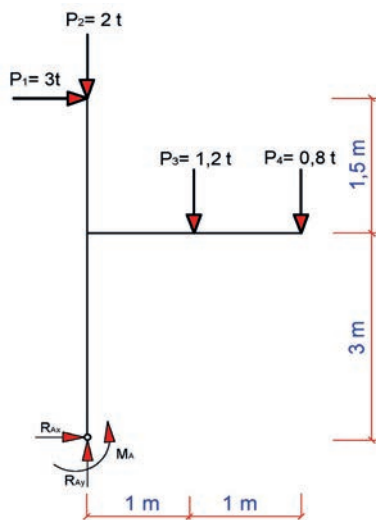
$$R_{Ay} + 8,8 = 10 \text{ t} \Rightarrow R_{Ay} = 10 - 8,8 \text{ ve buradan da } R_{Ay} = 1,2 \text{ t bulunur.}$$

**Problem:** Şekil 4.36'da verilen kolon ve konsol kiriş sisteminde  $P_1$  yatay,  $P_2$ ,  $P_3$  ve  $P_4$  düşey kuvvetlerinin etkisi altında olan A ankastre mesnedindeki mesnet tepkilerini hesaplayınız.



Şekil 4.36: Kolon ve konsol kiriş sistemi

**Çözüm:** A mesnedindeki mesnet tepkileri Şekil 4.37'deki gibi gösterilir.



Şekil 4.37: Kolon ve konsol kiriş sisteminde mesnet tepkileri

Şekil 4.37'de verilenlere göre denge denklemleri yazılırsa

$$\sum P_x = 0$$

$3 + R_{Ax} = 0$  ise  $R_{Ax} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -3$  t olur ve A mesnedinde oluşan yatay yöndeki  $R_{Ax}$  mesnet tepkisinin yönü değişir.

$$\sum P_y = 0$$

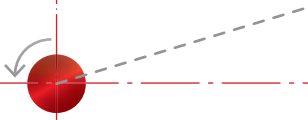
$R_{Ay} - P_2 - P_3 - P_4 = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 2 - 1,2 - 0,8 = 0$  buradan da  $R_{Ay} = 4$  t bulunur.

$$\sum MA = 0$$

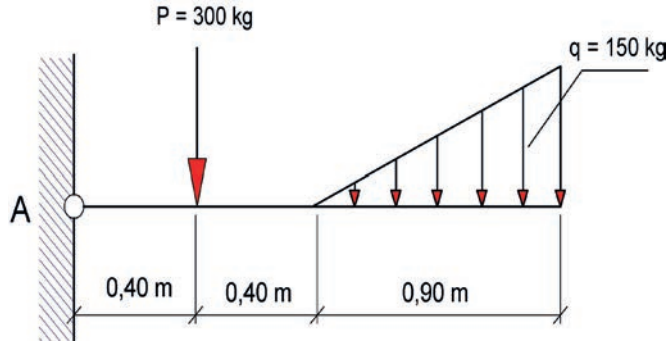
$$P_1 \times 4,5 + P_3 \times 1 + P_4 \times 2 - M_A = 0$$

$$3 \times 4,5 + 1,2 \times 1 + 0,8 \times 2 - M_A = 0$$

$$13,5 + 1,2 + 1,6 = M_A \Rightarrow M_A = 16,3$$
 tm olur.

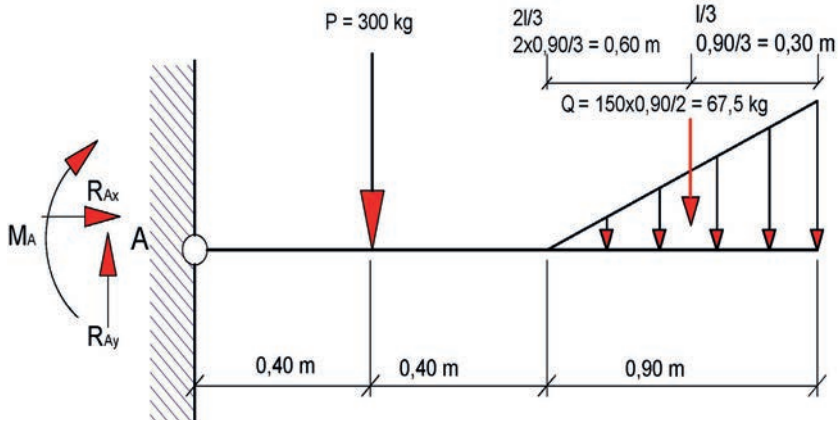


**Problem:** Şekil 4.38’de verilen konsol kiriş sisteminde P tekil kuvveti ve q üçgen yayılı yük etkisi altında olan A ankastre mesnedindeki mesnet tepkilerini hesaplayınız.



Şekil 4.38: Tekil yük ve üçgen yayılı yük etkisi altındaki konsol kiriş

**Çözüm:** A ankastre mesnedi tepkileri ve üçgen yayılı yük Şekil 4.39’daki gibi gösterilir.



Şekil 4.39: Konsol kiriş mesnet tepkileri ve üçgen yayılı yükün tekil yüke çevrilmesi

Şekil 4.39’da verilenlere göre denge denklemleri yazılırsa

$$\sum P_x = 0$$

Konsol kirişin ankastre mesnedinde oluşan yatay mesnet tepkisi kirişi etkileyen herhangi bir yatay kuvveti olmadığından  $R_{Ax} = 0$  olur.

$$\sum P_y = 0$$

$$R_{Ay} - P - Q = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 300 - 67,5 = 0 \text{ buradan da } \mathbf{R_{Ay} = 367,5 \text{ kg}}$$
 bulunur.

$$\sum M_A = 0 \text{ saatin yönü (+) saatin tersi yönü (-) alınır}$$

$$M_A + P \times 0,40 + Q \times 1,40 = 0$$

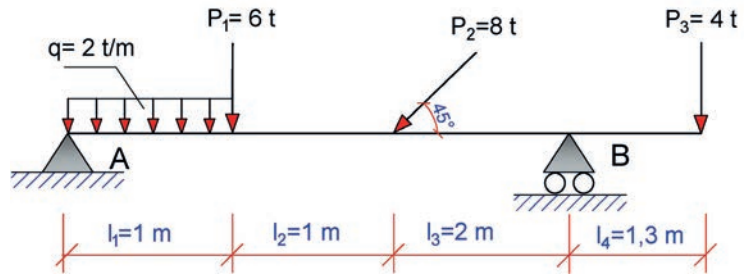
$$M_A + 300 \times 0,40 + 67,5 \times 1,40 = 0$$

$M_A + 120 + 94,5 = 0 \Rightarrow M_A = -214,5 \text{ kgm}$  olur ve  $M_A$ ’nın işareti (-) olduğundan ankastre mesnette oluşan eğilme momentinin yönü değişir.



## SIRA SİZDE

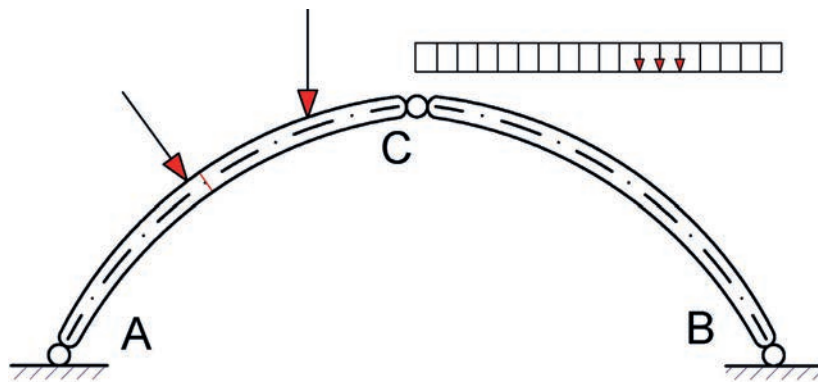
Şekil 4.40'ta verilen çukmal kiris sistem düzgün yayılı, dik ve açısıl konumlu yüklerin etkisi altındadır. Verilenlere göre A ve B mesnetlerinin tepkilerini hesaplayınız?



Şekil 4.40: Düzgün yayılı, dik ve açısıl konumlu tekil yüklerin etkisi altındaki çukmal kiris

### 4.3.3. Üç Mafsallı İzostatik Çerçevesel ve Kemerlerde Mesnet Tepkileri Hesaplama

Birinci dereceden hiperstatik bir sistem olan iki mafsallı çerçeve veya kemere bir ara mafsal eklendiğinde elde edilen sistem **üç mafsallı sistem** olarak adlandırılır. Mafsal, eğilme momenti kabul etmeyen bir bağ türü olduğundan mafsalı göre sistemin bir yarısına etki eden kuvvetlerin eğilme momentleri toplamı sıfır olmalıdır. Böylece denge denklemlerine ek olarak bir moment denklemi elde edilir. Dört bilinmeyen için denklem yeterli olduğundan üç mafsallı çerçeve veya kemerin izostatik olduğu anlaşılır (Şekil 4.41).

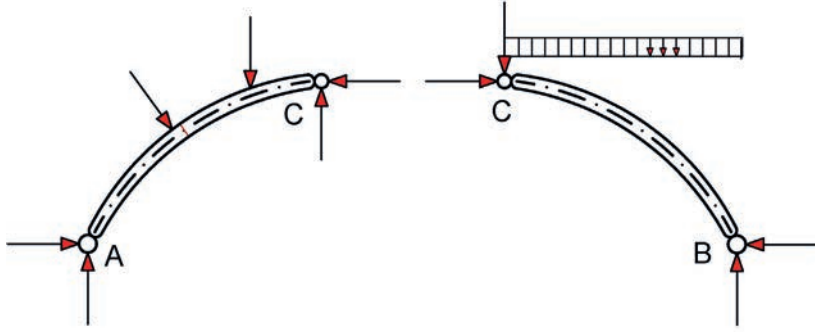


Şekil 4.41: Üç mafsallı sistem



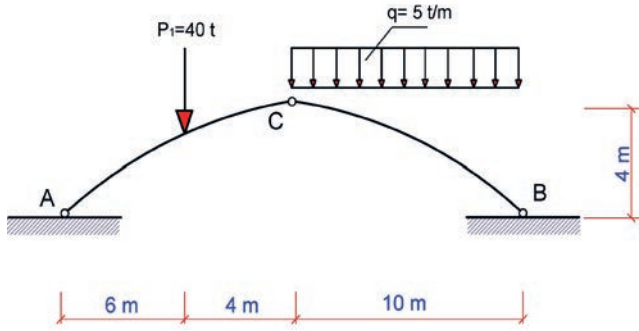
Üç mafsallı sistemin çerçeve veya kemer olması, mesnet tepkileri açısından herhangi bir fark oluşturmaz. Ara mafsallardaki mafsıl kuvvetlerini belirlemek için sistem, mafsallardan parçalara ayrılarak bölünür. Her parçanın dengesinden bilinmeyenler hesaplanır.

Üç mafsallı sistemlerin mesnet tepkileri grafik (çizim) yöntemle de bulunabilir. Eğer ara mafsalın yalnız bir tarafında kuvvet varsa kuvvet olmayan taraftaki mesnet tepkisi ara mafsaldan geçmek zorundadır. Aksi takdirde mafsalda momentin sıfır olma şartı sağlanamaz. Bu şekilde doğrultusu belirlenen tepki kuvveti ile verilen dış kuvvet kesitirilir. Kesim noktasını diğer mesnede birleştiren doğru ikinci mesnet tepkisinin doğrultusunu verir. Her iki mesnet tepkisinin doğrultusu belirlenince kuvvetler çokgeninden şiddet ve yönleri kolaylıkla bulunur. Ara mafsalın iki tarafında kuvvet olması durumunda bu işlem iki defa tekrarlanır. Bulunan sonuçlar toplanır ve mesnet tepkileri belirlenir (Şekil 4.42).



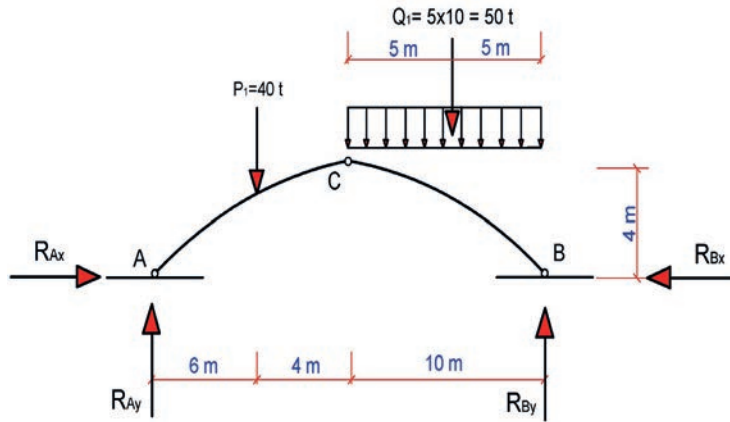
Şekil 4.42: Üç mafsallı sistemde mesnet ve mafsıl tepkileri serbest cisim diyagramı

**Problem:** Şekil 4.43'te tekil yük ve düzgün yayılı yük etkisi altında olan izostatik kemerin A, B ve C mafsallarındaki mesnet tepkilerini hesaplayınız.



Şekil 4.43: Üç mafsallı izostatik kemer

**Çözüm:** İzostatik üç mafsallı kemerin A ve B mesnet tepkileri ve düzgün yayılı yük Şekil 4.44'teki gibi çizilerek gösterilir.



Şekil 4.44: Üç mafsallı izostatik kemer mesnet, mafsıl tepkileri ve düzgün yayılı yükün tekil yüke çevrilmesi

İzostatik kemer kirişinin oturduğu A ve B mesnet tepkileri

$$\sum P_x = 0$$

Gerber kirişin mesnetlerinde oluşan yatay mesnet tepki denklemleri  $R_{Ax} - R_{Bx} = 0$  ve  $R_{Ax} = R_{Bx}$  olur.

$$\sum P_y = 0$$

$R_{Ay} - P_1 - Q_1 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 40 - 50 + R_{By} = 0$  buradan da  $R_{Ay} + R_{By} = 90 \text{ t}$  bulunur.

$\sum M_A = 0$  Saatin yönü (+) saatin tersi yönü (-) alınır

$$P_1 \times 6 + Q_1 \times 15 - R_{By} \times 20 = 0$$

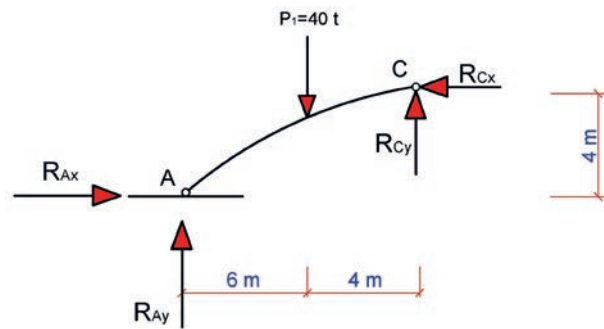
$$40 \times 6 + 50 \times 15 - R_{By} \times 20 = 0$$

$240 + 750 = 20R_{By}$  olur.  $20R_{By} = 990 \Rightarrow R_{By} = \frac{990}{20}$  buradan da  $R_{By} = 49,5 \text{ t}$  bulunur.

$R_{Ay} + R_{By} = 90 \text{ t}$  olarak bulunmuştu, denklemde  $R_{By}$  değeri yazılırsa;  $R_{Ay} + 49,5 = 90 \text{ t}$  olur.

$R_{Ay} = 90 - 49,5 \Rightarrow R_{Ay} = 40,5 \text{ t}$  bulunur.

İzostatik kemer kiriş sistemini C mafsallının solunda kalan yarı kısmın serbest cisim diyagramı çizilerek mafsalda oluşan tepkiler Şekil 4.45'te olduğu gibi gösterilir.



Şekil 4.45: Üç mafsallı izostatik kemer mafsal tepkileri serbest cisim diyagramı

İzostatik kemer kirişinin C mafsalında moment olmaması şartı;

$\sum M_C = 0$  Denge koşuluna göre saatin yönü (+) saatin tersi yönü (-) alınır

$$R_{Cx} \cdot 0 + R_{Cy} \cdot 0 + P_1 \cdot 4 + R_{Ax} \cdot 4 - R_{Ay} \cdot 10 = 0$$

$$0 + 0 + 40 \times 4 + 4R_{Ax} - 10R_{Ay} = 0$$

$160 - 10 \times 49,5 = -4R_{Ax}$ ,  $160 - 495 = -4R_{Ax}$ ,  $-335 = -4R_{Ax} \Rightarrow R_{Ax} = \frac{335}{4}$   $R_{Ax} = 83,75 \text{ t}$  olur.

### Mafsal Kuvvetleri

İzostatik kemer sisteminin sol yarısının izdüşüm denge denklemleri yazılırsa

$\sum P_x = 0$  Denge koşulundan  $R_{Ax} - R_{Cx} = 0 \Rightarrow 83,75 - R_{Cx} = 0$

$R_{Cx} = 83,75 \text{ t}$  bulunur.

$\sum P_y = 0$  Denge koşulundan  $R_{Ay} - P_1 + R_{Cy} = 0 \Rightarrow 40,5 - 40 + R_{Cy} = 0$

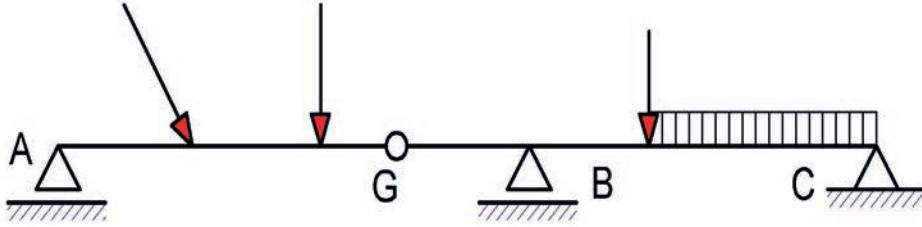
$R_{Cy} = -0,5 \text{ t}$  bulunur ( Negatif olduğundan kuvvetin yönü değişir. ).

### 4.3.4. Gerber Kirişlerinde Mesnet Tepkileri Hesaplama

İki mesnetli basit kiriş yerine daha çok mesnetli sürekli kirişler olması halinde mesnet tepkileri sayısı üçten fazla olacağından bu tür sistemler hiperstatik olur. Bu tür sistemlerde sistemi izostatik hale getirebilmek için hiperstatiklik derecesi kadar ara mafsallın uygun şekilde yerleştirilmesi gerekir. Böylece izostatik hale getirilen sürekli kirişlere **Gerber kirişleri** adı verilir.

Bir başka tanımla; sürekli kirişlere ara mesnet sayısı kadar mafsal ekleyerek elde edilen izostatik sistemlere **Gerber kirişleri** denir.

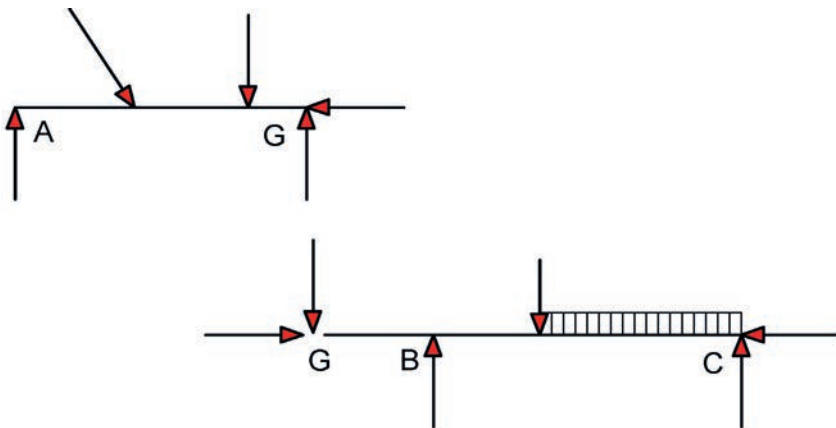
Gereğinden fazla sayıda mafsal, sistemi kararsız hâle getirir. Bu nedenle; açıklıklara birden fazla ve ara açıklıklara ikiden çok mafsal konulmamalıdır. Mafsallar düzenlenirken elde edilecek olan sistemin taşıyıcı olmasına dikkat edilmelidir (Şekil 4.46).



Şekil 4.46: Çeşitli yüklerin etkisi altındaki Gerber kirişi

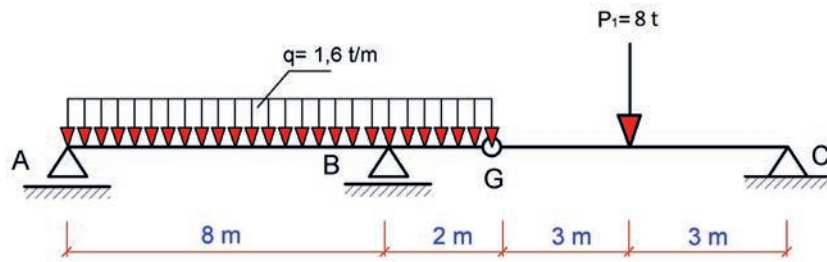
Gerber kirişlerinin mesnet tepkileri, genel olarak denge denklemlerine ara mafsal sayısı kadar eklenecek denklemlerle bulunur. Aynı zamanda mafsallı sistemlerde olduğu gibi sistem, mafsallardan parçalara ayrılarak hesaplanabilir. Gerber kirişi ara mafsallardan bölünmesi hâlinde basit kiriş, çıkmalı kiriş ve konsol kiriş gibi izostatik sistemler elde edilir. Bunların mesnet tepkileri ayrı ayrı hesaplanarak Gerber kirişine ait tepki kuvvetleri ile mafsal kuvvetleri belirlenir.

Gerber kirişinin serbest cisim diyagramı çizilerek mesnetlerde ve Gerber kiriş mafsalında oluşan tepkiler Şekil 4.47'de gösterilmiştir.



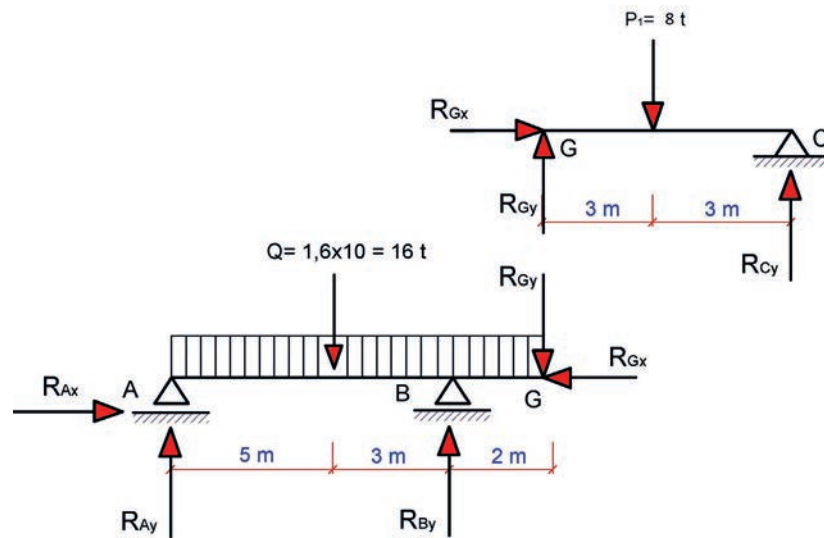
Şekil 4.47: Gerber kirişin oturduğu mesnetlerin ve Gerber mafsalı tepki kuvvetleri serbest cisim diyagramı

**Problem:** Şekil 4.48’de yükleme durumu verilen Gerber kirişin A, B ve C mesnetleri ile G mafsalsındaki tepkileri hesaplayınız.



Şekil 4.48: Düzgün yayılı ve tekil yük etkisi altındaki Gerber kirişi

**Çözüm:** Yükleme durumu verilen Gerber kirişin mesnet ve Gerber mafsalsının tepki kuvvetleri Şekil 4.49’da görüldüğü gibi serbest cisim diyagramı çizilerek gösterilir.



Şekil 4.49: Gerber kirişinin oturduğu mesnet ve Gerber mafsalsı tepki kuvvetleri serbest cisim diyagramı

Sistem G mafsalsından iki kısma ayrıldıktan sonra bir tane basit kiriş ve bir tane de çıkmalı kiriş elde edilir. Bu şekil, Gerber kirişlerinin mesnet tepkilerinin bulunması için indirgenmiş olur.

Şekil 4.48’de görülen GC kirişi simetri nedeniyle  $R_{Cy} = R_{Gy} = 4 \text{ ton}$  olur. Sistemi etkileyen yatay yük olmadığından  $R_{Gx} = 0$  olacaktır.

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan Şekil 4.48’de görülen ABG kirişinde yatay yük olmadığından  $R_{Ax} = 0$  olur.

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan  $R_{Ay} + R_{By} - 1,6 \times (8+2) - 4 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 20 \text{ ton}$  bulunur.

$\sum M_A = 0$  denge koşulundan  $Q \cdot 5 + R_{Gy} \cdot 10 - R_{By} \cdot 8 = 0 \Rightarrow 16 \times 5 + 4 \times 10 - R_{By} \cdot 8$

$8R_{By} = 80 + 40$  buradan da  $8R_{By} = 120 \Rightarrow R_{By} = \frac{120}{8}$  ve  $R_{By} = 15 \text{ ton}$  bulunur.

$R_{Ay} + R_{By} = 20 \text{ ton}$  olduğuna göre  $R_{Ay} + 15 = 20$  olur.

Buradan da  $R_{Ay} = 20 - 15 \Rightarrow R_{Ay} = 5 \text{ ton}$  bulunur.

### 4.3.5. Kafes Kiriş Sistemlerinde Mesnet Tepkileri Hesaplama

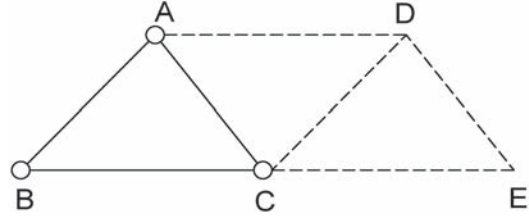
Dolu gövdeli sistemlerde büyük açıklıkları geçmek veya geniş açıklıkları kapatmak ekonomik olamayacağı için uygun taşıyıcı sistemlerin başında kafes sistemler gelir. Kafes sistemler, doğru eksenli çubukların uçlarından birbirleriyle birleştirilmesiyle elde edilir. Çubukların birleştiği noktalara kafes sistemin **düğüm noktaları** adı verilir. Mesnetler de bir tür düğüm noktalarıdır.

Düğüm noktalarındaki kafes kirişlerin çubuk kuvvetleri denge denklemleri ile çözülür. Kafes sistemi oluşturan çubuklarda oluşan kuvvetleri ayırt edilebilmesi için çubuk **çekme kuvveti ise (+) ve basınç kuvveti ise (-)** işareti ile ifade edilir.

Kafes sistemler, düzlem veya uzay kafes sistemler şeklinde olabilir. Teşkil şekillerine göre ise kafes sistemler; basit, birleşik ve karışık kafes sistemlerdir. Kafes sistemler; gerek mesnet, gerekse çubuk kuvvetleri açısından izostatik sistemlerdir. Düzlem kafes sistem kirişlerinin oturduğu mesnetlerin tepki kuvvetleri de tıpkı basit kiriş, çıkmalı kiriş ve konsol kirişlerde olduğu gibi denge denklemleri ile hesaplanabilen izostatik sistemlerdir.

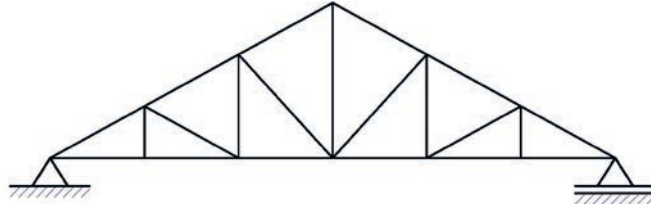
Bütün çubukları, düğüm noktaları ve yükleri aynı düzlemde olan sistemlere düzlem kafes sistem adı verilir. Uçlarında mafsallı olarak birleşen üç çubuğun oluşturduğu sistem, en basit bir düzlem kafes sistem örneğidir.

Üç çubukla teşkil edilen kafes sisteme **temel üçgen sistem** adı verilir (Şekil 4.50). Temel üçgen kafesten başlayarak iki düğüm noktasına iki çubukla bağlanan her yeni düğüm noktası ile daha büyük kafes sistemler elde edilir. Bu şekilde elde edilen kafes sistemlere **basit kafes sistemler** denir.



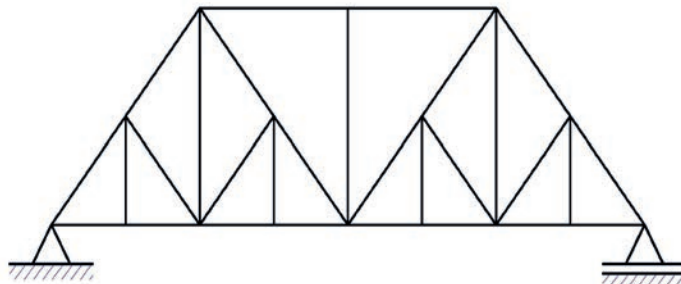
Şekil 4.50: Temel üçgenden oluşturulan basit kafes sistem

**Howe sistemi** olarak bilinen ve tipik bir çatı makası olarak kullanılan sistem **basit kafes sistem** olarak adlandırılır (Şekil 4.51). Ancak üçgenlerden oluştuğu halde bu kurala uymayan **Baltimore köprü kafes kirişi** gibi sistemler basit kafes sistem değildir (Şekil 4.52).



Şekil 4.51: Howe tipi basit kafes sistem

Basit kafes kiriş sistemlerinde düğüm noktaları sayısı (mesnetler dâhil)  $d$ , çubuk sayısı  $s$  ile gösterilirse  $s = 2d - 3$  bağıntısı ile çubuk sayısı hesaplanır.

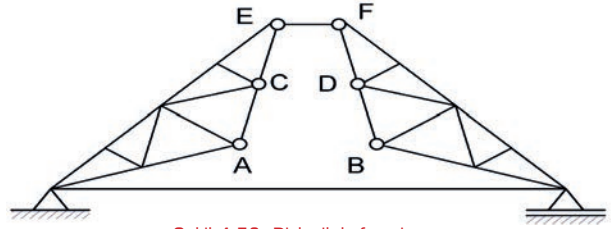


Şekil 4.52: Baltimore köprü kafes sistem

İki basit sistemin birbirine paralel olmayan ve bir noktada kesişmeyen üç çubukla birleştirilmesiyle elde edilen kafes sisteme **birleşik kafes sistem** adı verilir (Şekil 4.53).

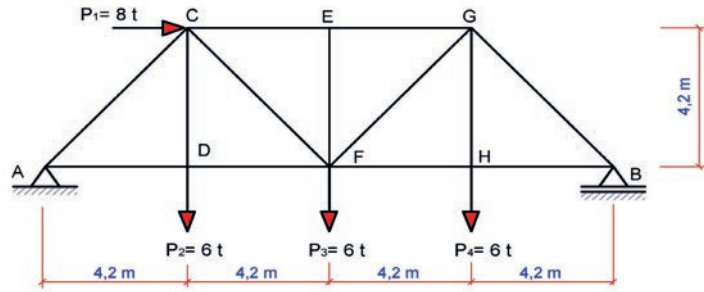
Bileşik kafes sistemlerde de çubuk sayısı;  $s = 2d - 3$  bağıntısı ile hesaplanır. Basit ve birleşik kafes sistemler dışında kalan sistemlere **karişik kafes sistemler** adı verilir.

Düzlem kafes sistemler; uygulamada dolu gövdeli taşıyıcı sistemler gibi basit veya çıkmalı kafes kiriş, konsol kafes kiriş, kafes çerçeve, üç mafsallı çerçeve veya kemer ve Gerber kafes kiriş şeklinde olabilir.



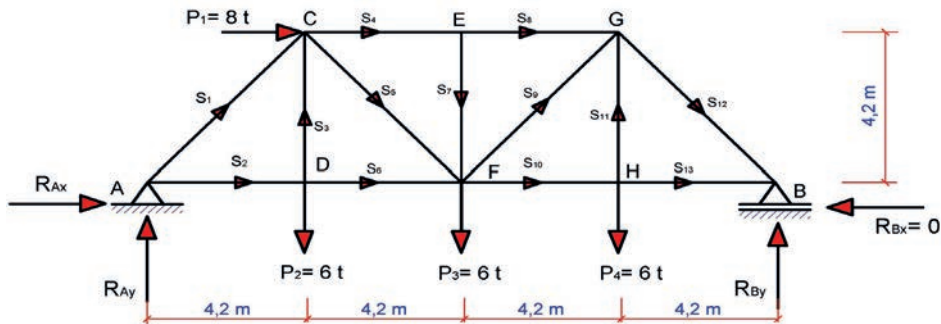
Şekil 4.53: Birleşik kafes sistem

**Problem:** Şekil 4.54'te yükleme durumu verilen izostatik kafes kirişin çubuk kuvvetlerini gösteriniz ve mesnetlerde oluşan tepkileri hesaplayınız.



Şekil 4.54: Yükleme durumu verilen izostatik kafes sistem

**Çözüm:** İzostatik kafes kirişin mesnet tepkileri ve çubuk kuvvetleri Şekil 4.55'te olduğu gibi çizilerek gösterilir.



Şekil 4.55: İzostatik kafes kirişin mesnet tepkileri ve çubuk kuvvetleri serbest cisim diyagramı

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan  $R_{Ax} + P_1 - R_{Bx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} - 8 - 0 = 0$  ve  $R_{Ax} = 8$  ton bulunur.

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan  $R_{Ay} - 6 - 6 - 6 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 18$  ton olur.

$\sum M_A = 0$  denge koşulundan  $P_1 \times 4,2 + P_2 \times 4,2 + P_3 \times 8,4 + P_4 \times 12,6 - 16,8 \cdot R_{By} = 0$   
 $8 \times 4,2 + 6 \times 4,2 + 6 \times 8,4 + 6 \times 12,6 - 16,8 \cdot R_{By} = 0$

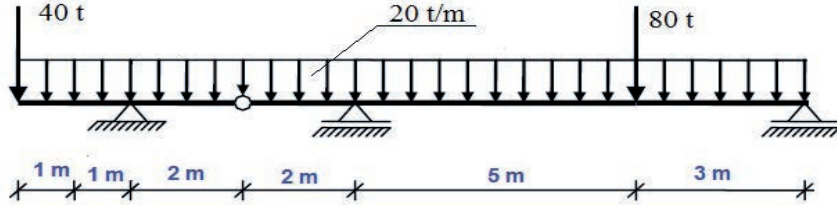
$16,8 R_{By} = 33,6 + 25,2 + 50,4 + 75,6$  buradan da  $16,8 R_{By} = 184,8 \Rightarrow R_{By} = \frac{184,8}{16,8}$  ve  $R_{By} = 11$  ton bulunur.

$R_{Ay} + R_{By} = 18$  ton olduğuna göre  $R_{Ay} + 11 = 18$  olur. Buradan da  $R_{Ay} = 18 - 11 \Rightarrow R_{Ay} = 7$  ton bulunur.



## SIRA SİZDE

Şekil 4.56'da yükleme durumu verilen Gerber kirişin oturduğu mesnetlerde ve Gerber mafsalında oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız?



Şekil 4.56: Düzgün yayılı ve tekil yüklerin etkisi altındaki Gerber kirişi

### 4.4. UYGULAMA

## BASİT VE ÇIKMALI KİRİŞLERDE TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA

8 DERS SAATİ

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



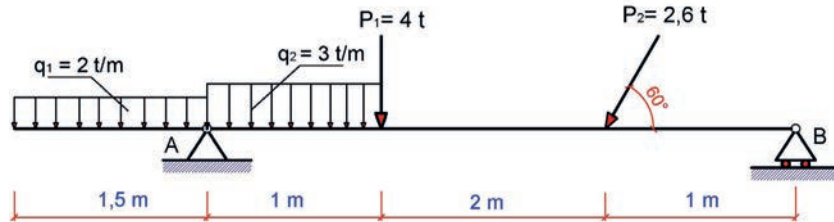
36151

Bu çalışmanın amacı, kirişlerde tepki kuvvetlerini hesaplama ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

Kirişlerde mesnet tepkisi uygulamasını işlem basamaklarına göre öğretmenin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 4.57'de yükleme durumu verilen çıkmalı kirişin A ve B mesnetlerindeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



Şekil 4.57: Düzgün yayılı, düşey ve açısall yük etkisi altındaki çıkmalı kiriş

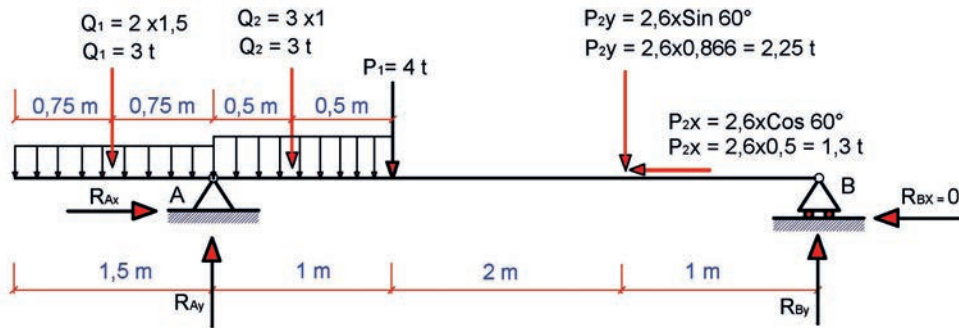


## Yönerge

- Çalışmanızda düzgün yayılı yüklerin tekil yüke çevrilmesine dikkat ediniz.
- Çalışmanızda açısız yükün yatay ve düşey izdüşümlerini hesaplarken açı değerlerini doğru almayaya dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde görebilirsiniz.

## İşlem Basamakları

- Şekil 4.57'de verilen çıkmalı kirişin A ve B mesnetlerindeki tepki kuvvetleri de gösterilerek serbest cisim diyagramı çizilir (Şekil 4.58).
- Çizilen serbest çizim diyagramında çıkmalı kirişteki 2 adet düzgün yayılı yük, tekil yüke çevrilir ve tekil yükün etki mesafeleri gösterilir (Şekil 4.58).
- Çıkmalı kirişe etki eden açısız yük, yatay ve düşey izdüşümlerine ayrılarak hesaplanır (Şekil 4.58).



Şekil 4.58: Çıkmalı kiriş serbest cisim diyagramı

- Yatay yöndeki kuvvetlerin denge koşulu ile A ve B mesnetlerindeki yatay tepki kuvvetleri bulunur.

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan B mesnedi hareketli olduğundan  $R_{Bx} = 0$  olur.

$R_{Ax} - P_{2x} - R_{Bx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} - 1,3 - 0 = 0$  buradan da  $R_{Ax} = 1,3$  t bulunur.

- Çizilen serbest çizim diyagramına göre düşey yöndeki kuvvetlerin denge koşulu ile A ve B mesnetlerindeki düşey tepki kuvvetlerinin toplamı bulunur.

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan  $-Q_1 + R_{Ay} - Q_2 - P_1 - P_{2y} + R_{By} = 0$

$-3 + R_{Ay} - 3 - 4 - 2,25 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 12,25$  t bulunur.

- A noktasına göre çıkmalı kirişe etki eden yatay ve düşey kuvvetlerin A noktasına göre momenti alınarak B mesnedindeki düşey tepki kuvveti hesaplanır.

$\sum M_A = 0$  denge koşulundan

$-Q_1 \cdot 0,75 + R_{Ax} \cdot 0 + Q_2 \cdot 0,5 + P_1 \cdot 1 + P_{2y} \cdot 3 + P_{2x} \cdot 0 - R_{By} \cdot 4 - R_{Bx} \cdot 0 = 0$

$-3 \cdot 0,75 + 0 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 1 + 2,25 \cdot 3 + 0 + R_{By} \cdot 4 - 0 = 0 \Rightarrow 4R_{By} = -2,25 + 1,5 + 4 + 6,75$  olur.

$4R_{By} = 10 \Rightarrow R_{By} = \frac{10}{4}$  buradan da  $R_{By} = 2,5$  t bulunur.



- A ve B mesnetlerinin düşey tepki kuvvetlerinin toplamında bulunan iki bilinmeyenli denklemden B mesnedindeki düşey tepki kuvveti değeri yerine konur ve A mesnedindeki düşey tepki kuvveti bulunur.

$R_{Ay} + R_{By} = 12,25 \text{ t}$  denkleminde  $R_{By}$  düşey mesnet tepkisi yerine konursa

$R_{Ay} + 2,5 = 12,25 \text{ t} \Rightarrow R_{Ay} = 9,75 \text{ t}$  bulunur.

### UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için "Evet", kazanamadığınız beceriler için "Hayır" kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	Çıkmalı kirişin A ve B mesnetlerindeki tepki kuvvetlerini göstererek serbest cisim diyagramını çizdiniz mi?		
2	Çıkmalı kirişteki 2 adet düzgün yayılı yükü tekil yüke çevirip tekil yüklerin etki mesafelerini gösterdiniz mi?		
3	Çıkmalı kirişe etki eden açılmal yükü yatay ve düşey izdüşümlerine ayırarak hesapladınız mı?		
4	Yatay yöndeki kuvvetlerin denge koşulu ile A ve B mesnetlerindeki yatay tepki kuvvetlerini buldunuz mu?		
5	Düşey yöndeki kuvvetlerin denge koşulu ile A ve B mesnetlerindeki düşey tepki kuvvetlerinin toplamını buldunuz mu?		
6	A noktasına göre çıkmalı kirişe etki eden yatay ve düşey kuvvetlerin A noktasına göre momentini alarak B mesnedindeki düşey tepki kuvvetini hesapladınız mı?		
7	A ve B mesnetlerinin düşey tepki kuvvetlerinin toplamı ile bulunan iki bilinmeyenli denklemden B mesnedindeki düşey tepki kuvveti değerini kullanarak A mesnedindeki düşey tepki kuvvetini buldunuz mu?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

### DEĞERLENDİRME

Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	30	60	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:		Tarih
					..... / ..... / .....
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		

#### 4.5. UYGULAMA

## ÇERÇEVE VE KEMER SİSTEMİ KİRİŞLERİNDE TEPKİ KUVVETLERİNİ HESAPLAMA

2 DERS SAATI

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



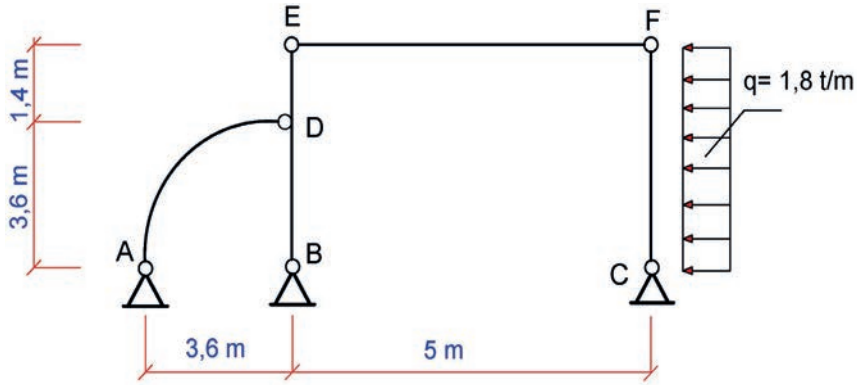
36152

Bu çalışmanın amacı, kirişlerde mesnet tepki kuvvetlerini hesaplama ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

Kirişlerde mesnet tepki kuvvetlerini hesaplama uygulamasını işlem basamaklarına göre öğretmeninizin gözetiminde yerine getiriniz.

- Şekil 4.59'da yarım kemer ve çerçeveden oluşan kiriş sisteminin A, B, C mesnetlerinde ve D, E ve F mafsallarında oluşan tepkilerini hesaplayınız.



Şekil 4.59: Yarım kemer ve çerçeve kiriş sistemi

### Yönerge

- Çalışmanızda düzgün yayılı yükü tekil yüke çevirirken dikkat ediniz.
- Çalışmanızda serbest cisim diyagramlarını oluştururken mesnetleri ve tepki yönlerini doğru belirlemeye dikkat ediniz.
- Çalışmanızda denge koşulları ile oluşturacağınız denklemlerde hata yapmamaya dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde net olarak görebilirsiniz.

### İşlem Basamakları

- Şekil 4.59'da verilen çerçevenin E ve F mafsallarının serbest cisim diyagramı çizilir (Şekil 4.60).
- Çizilen serbest çizim diyagramına göre mafsallarda oluşan tepki kuvvetleri denge koşulları ile hesaplanır.

EF den;

$$\sum M_E = 0$$

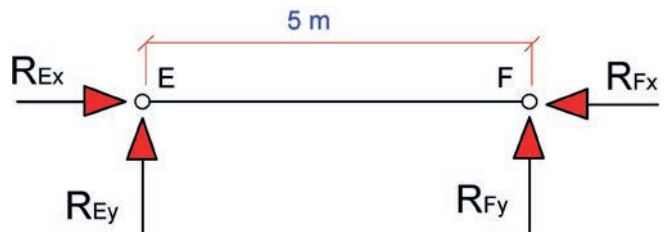
$$R_{Fy} = 0 \text{ olur.}$$

$$\sum P_y = 0 \text{ ise } R_{Ey} + R_{Fy} = 0$$

$$R_{Ey} = 0 \text{ olur.}$$

$$\sum P_x = 0 \text{ ise } R_{Ex} - R_{Fx} = 0$$

$$R_{Ex} = R_{Fx}$$



Şekil 4.60: E ve F mafsalları serbest cisim diyagramı



- Şekil 4.59'da verilen kemer ve çerçevenin A, B ve C mesnetleri ile D, E ve F mafsallarının serbest cisim diyagramları çizilir (Şekil 4.61).
- Çizilen serbest çizim diyagramlarına göre mesnetlerde ve mafsallarda oluşan tepki kuvvetleri denge koşulları ile hesaplanır.

#### FC den;

$\sum M_F = 0$  denge koşulundan

$$2,5 \cdot (5 \cdot 1,8) - 5 \cdot R_{Cx} = 0$$

$R_{Cx} = 4,5$  ton olur.

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan

$$R_{Cy} = R_{Fy} = 0$$

$R_{Cy} = R_{Fy}$  olur.

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan

$$R_{Fx} + R_{Cx} - Q_1 = 0$$

$$R_{Fx} + 4,5 - 9 = 0$$

$R_{Fx} = 4,5$  ton bulunur.

$R_{Ex} = R_{Fx}$

EF den bulunmuştu buradan da

$R_{Fx} = 4,5$  ton olur.

#### ABDE den;

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan

$$R_{Ax} + R_{Bx} - 4,5 = 0$$

$R_{Ax} + R_{Bx} = 4,5$  ton olur.

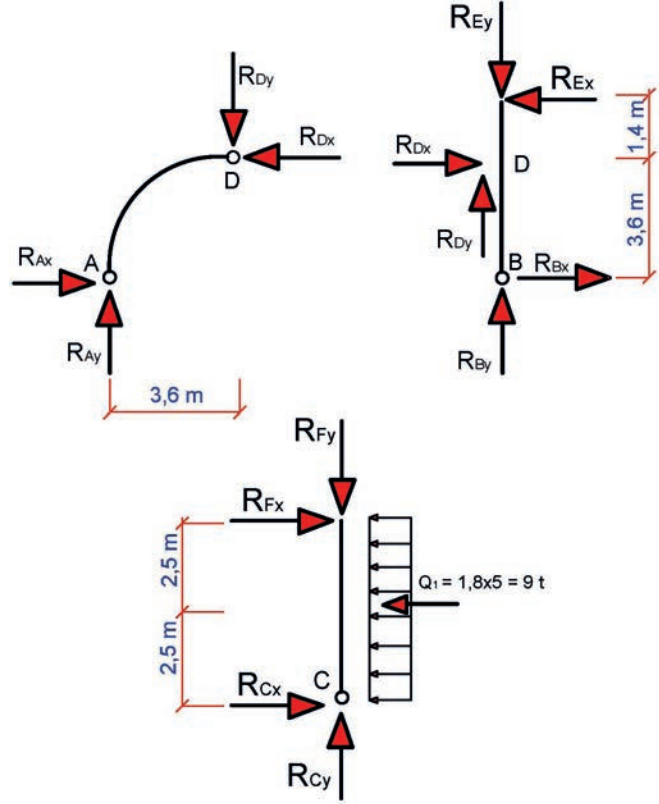
$\sum P_y = 0$  denge koşulundan

$$R_{Ay} + R_{By} = 0$$

$\sum M_A = 0$  denge koşulundan

$$5 \cdot 4,5 + 3,6 \cdot R_{By} - 3,6 \cdot R_{Ey} = 0$$

$R_{By} = -6,25$  ton ve  $R_{Ay} = 6,25$  ton bulunur.



Şekil 4.61: A, B, C mesnetleri ile D, E, F mafsalları serbest cisim diyagramları

- Şekil 4.59'da verilen kemer ve çerçevenin A, B mesnetleri ile D, E mafsallarının serbest cisim diyagramları çizilir (Şekil 4.62).
- Çizilen serbest çizim diyagramlarına göre mesnetlerde ve mafsallarda oluşan tepki kuvvetleri denge koşulları ile hesaplanır.

#### AD den;

$\sum M_D = 0$  denge koşulundan

$$3,6 \cdot R_{Ay} - 3,6 \cdot R_{Ax} = 0$$

$R_{Ay} = R_{Ax} = 6,25$  ton bulunur.

$$R_{Bx} = -6,25 + 4,50$$

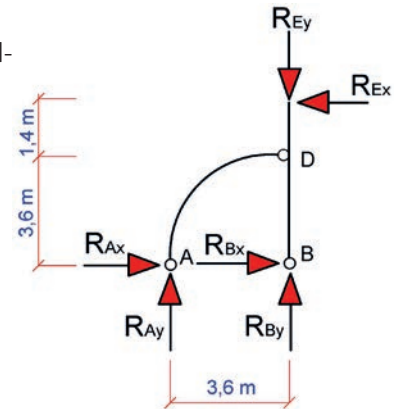
$R_{Bx} = -1,75$  ton olur.

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan

$R_{Dx} = R_{Ax} = 6,25$  ton olur.

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan

$R_{Dy} = R_{Ay} = 6,25$  ton olur.



Şekil 4.62: A, B mesnetleri ile D, E mafsalları serbest cisim diyagramı



## UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için "Evet", kazanamadığınız beceriler için "Hayır" kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	Çerçeve giriş sisteminde E ve F mafsallarının serbest cisim diyagramını çizdiniz mi?		
2	E ve F mafsalları serbest çizim diyagramına göre mafsallarda oluşan tepki kuvvetlerini denge koşulları ile hesapladınız mı?		
3	Kemer ve çerçevenin A, B ve C mesnetleri ile D, E ve F mafsallarının serbest cisim diyagramlarını çizdiniz mi?		
4	A, B ve C mesnetleri ile D, E ve F mafsalları serbest çizim diyagramlarına göre mesnetlerde ve mafsallarda oluşan tepki kuvvetlerini denge koşulları ile hesapladınız mı?		
5	Kemer ve çerçevenin A, B mesnetleri ile D, E mafsallarının serbest cisim diyagramını çizdiniz mi?		
6	Kemer ve çerçevenin A, B mesnetleri ile D, E mafsalları serbest çizim diyagramına göre mesnetlerde ve mafsallarda oluşan tepki kuvvetlerini denge koşulları ile hesapladınız mı?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

DEĞERLENDİRME					
Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	20	70	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:		Tarih
					..... / ..... / .....
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		



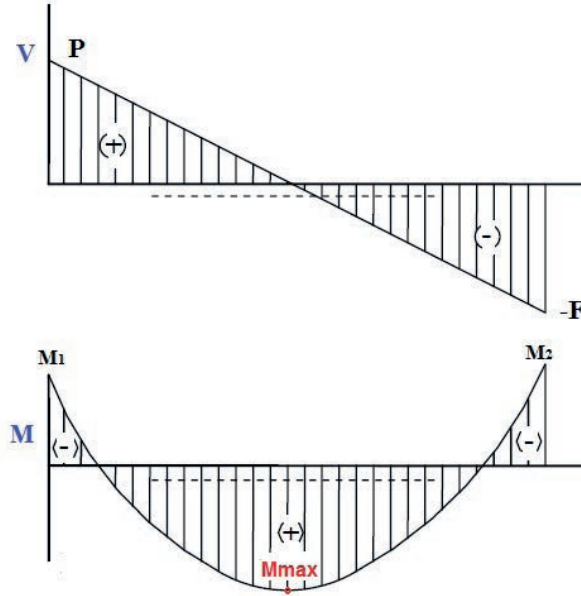
## HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

Yapılarda kirişleri etkileyen, yükler karşısındaki davranışlarını ifade eden kesit tesirlerini araştırınız ve bunları sınıfta arkadaşlarınızla paylaşınız.

## 4.6. KIRIŞLERDE KUVVET DİYAGRAMLARINI ÇİZME

Bu öğrenme biriminde; izostatik dolu gövdeli sistemlerin, üç mafsallı çerçevelerin, kemerlerin, Gerber kirişlerinin ve kafes sistemlerin mesnet tepkileri ile bu sistemleri etkileyen yükler altında normal kuvvet, kesme kuvvetleri ve eğilme momenti kuvvet diyagramlarının çizilmesine değinilecektir.

Kiriş sistemlerinde kuvvet diyagramları çizilirken; düşey kesme kuvvetlerinin aşağıdan yukarı yönlü pozitif yönleri yukarı doğru ve yukarıdan aşağı yönlü negatif yönleri aşağı doğru alınır. Eğilme momentlerinin pozitif yönü aşağı doğru ve negatif yönleri ise yukarı doğru alınarak çizilir (Şekil 4.63).



Şekil 4.63: Kesme kuvveti ve eğilme momenti kesit tesirleri diyagramları örneği

Kirişleri yatay yönde etkileyen kuvvetlerin diyagramları çizilirken soldan sağa yönlü kuvvetlerin pozitif yönleri yukarı doğru çizilir. Sağdan sola yönlü kuvvetlerin negatif yönleri aşağı doğru çizilir.

### Kirişlerde Kuvvet Diyagramları Çizimi İşlem Basamakları

- Sisteme etkileyen mesnetlerin tepki kuvvetleri ve yönleri kabul edilerek gösterilir.
- Kirişi etkileyen açısallı, düzgün yayılı, üçgen yayılı vb. yükler var ise tekil yüke çevrilir.
- Kirişi etkileyen düzgün yayılı, üçgen yayılı vb. yüklerin kirişi etkilediği mesafelerin mesnetlere olan uzaklıkları belirlenir.
- Mesnet tepkileri denge denklemleri yardımıyla hesaplanır.
- Hesaplanan mesnet tepkileri ve kiriş sistemini etkileyen yatay yönlü yükler göz önünde bulundurularak normal kuvvetler (N) diyagramı çizilir.

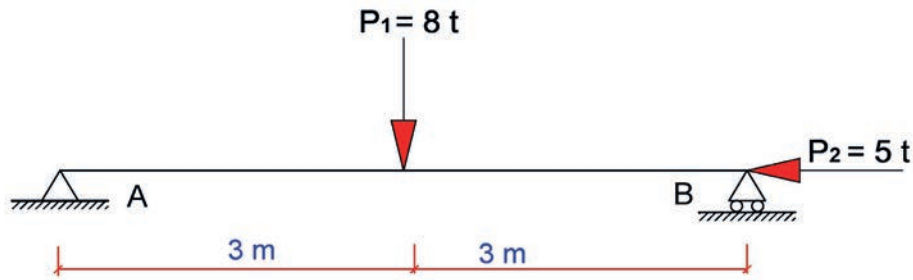
- Hesaplanan mesnet tepkileri ve kiriş sistemini etkileyen düşey yönlü yükler göz önünde bulundurularak kesme kuvvetleri (V) diyagramı çizilir.
- Çizilen kesme kuvvetleri diyagramındaki geometrik şekillerden oluşan alanlar hesaplanır.
- Düşey kuvvetlerin türü ve yönlerine göre kesme kuvvet diyagramı alanları ve yüklerin türüne göre eğilme momenti (M) diyagramı çizilir.
- Çizilen eğilme momenti diyagramlarından en büyük ve en küçük eğilme momenti tespit edilir.



### BİLGİ KUTUSU

**Kirişlerde kesit tesirleri ile belirli noktalarda kesilerek kesit tesirleri hesap değerleri bulunur. Kirişte istenilen yerlerde yapılacak kesimler ile elde edilen kısmi kesitlerde denge denklemleri kullanılarak kesit tesirlerinin yatay, düşey ve moment denklemleri oluşturularak kesit alınan noktalardaki etkiler bulunur.**

**Problem:** Şekil 4.64'te yükleme durumu verilen basit kirişin mesnet tepkilerini hesaplayarak normal kuvvet (N), kesme kuvveti (V) ve eğilme momenti (M) diyagramlarını çiziniz.



Şekil 4.64: Tekil kuvvet etkisi altındaki basit kiriş

### Çözüm:

- Denge denklemleri ile basit kirişin mesnet tepkileri hesaplanır.

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan B mesnedi hareketli mesnet olduğundan  $R_{Bx} = 0$  olur.

$R_{Ax} - P_2 - R_{Bx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} - 5 - 0 = 0$  ve  $R_{Ax} = 5 \text{ ton}$  bulunur.

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan  $R_{Ay} - 8 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 8 \text{ ton}$  olur.

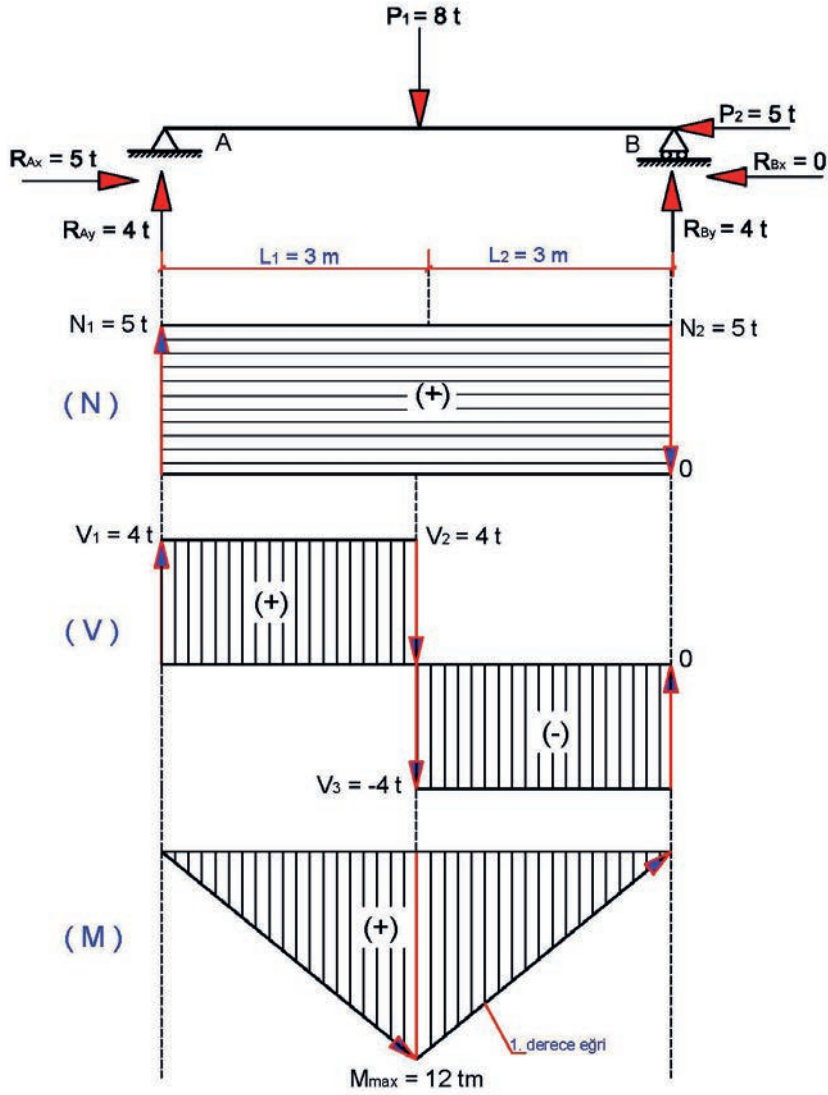
$\sum M_A = 0$  denge koşulundan  $P_1 \cdot 3 - P_2 \cdot 0 - 6 \cdot R_{By} = 0$

$8 \times 3 + 0 - 6 \times R_{By} = 0$

$6R_{By} = 24$  buradan da  $R_{By} = \frac{24}{6}$  ve  $R_{By} = 4 \text{ ton}$  bulunur.

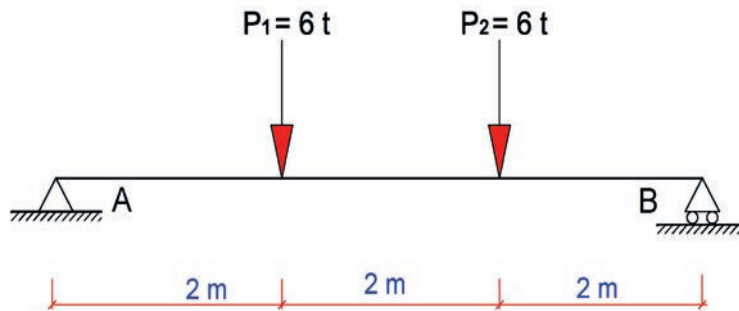
$R_{Ay} + R_{By} = 8 \text{ ton}$  olduğuna göre  $R_{Ay} + 4 = 8$  olur. Buradan da  $R_{Ay} = 8 - 4 \Rightarrow R_{Ay} = 4 \text{ ton}$  bulunur.

- Hesaplanan basit kirişin mesnet tepkileri Şekil 4.65'te olduğu gibi gösterilir.
- Normal kuvvet (N) diyagramı çizilirken yatay yönde olan kuvvetlerden soldan sağa olan kuvvetler yukarı yönlü ve sağdan sola kuvvetler aşağı yönlü Şekil 4.65'te olduğu gibi çizilir.
- Kesme kuvvet (V) diyagramında yukarı yönlü olan kuvvetler yukarı doğru ve aşağı yönlü olan kuvvetler aşağı doğru çizilir. Kirişin boş olan kısımları doğrusal çizgi ile ifade edilir.
- Eğilme momenti (M) diyagramı çizilirken kesme kuvvet diyagramında doğrusal olarak çizilen kısımlar 1. dereceden eğri olarak çizilir. Maximum momentin ( $M_{\max}$ ) oluşacağı nokta  $P_1$  kuvveti kesim noktasıdır. Kesme kuvvet diyagramında  $V_1 = V_2 = 4 \text{ t}$  olur.
- Kesme kuvvet diyagramında oluşan dikdörtgenin alanı yani moment değeri;  
 $M_{\max} = V_2 \times L_1 = 4 \times 3 = 12 \text{ tm}$  bulunur.
- Eğilme momenti diyagramı 12 tm'lik nokta işaretlenerek eğilme momenti diyagramı Şekil 4.65'te olduğu gibi çizilir.



Şekil 4.65: Tekil kuvvet etkisi altındaki basit kiriş mesnet tepkileri N, V ve M diyagramları

**Problem:** Şekil 4.66'da yükleme durumu verilen basit kirişin mesnet tepkilerini hesaplayarak kesme kuvveti (V) ve eğilme momenti (M) diyagramlarını çizin.



Şekil 4.66: İki tekil kuvvet etkisi altındaki basit kiriş

- **Çözüm:** Basit kirişin oturduğu A ve B mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.

$\sum P_x = 0$  denge koşulu, kirişi etkileyen yatay kuvvet olmadığından

$R_{Ax} = 0$  ve  $R_{Bx} = 0$  olur.

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan  $R_{Ay} - 6 - 6 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 12$  ton olur.

$\sum M_A = 0$  denge koşulundan

$$P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 4 - 6 \cdot R_{By} = 0$$

$$6 \times 2 + 6 \times 4 - 6 \times R_{By} = 0$$

$$6R_{By} = 36 \text{ buradan da } R_{By} = \frac{36}{6} \text{ ve } R_{By} = 6 \text{ ton bulunur.}$$

$R_{Ay} + R_{By} = 12$  ton olduğuna göre

$R_{Ay} + 6 = 12$  olur. Buradan da

$R_{Ay} = 12 - 6 \Rightarrow R_{Ay} = 6$  ton bulunur (Şekil 4.67).

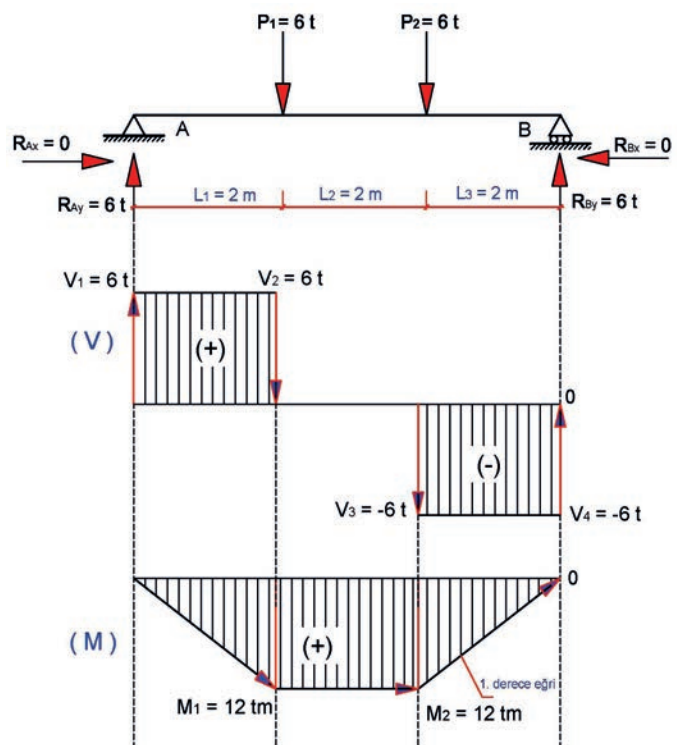
- Hesaplanan basit kirişin mesnet tepkileri Şekil 4.67'de olduğu gibi gösterilir.
- Kesme kuvvet (V) diyagramında yukarı yönlü olan kuvvetler yukarı doğru ve aşağı yönlü olan kuvvetler aşağı doğru çizilir. Kirişte boş olan kısımlar doğrusal çizgi ile ifade edilir (Şekil 4.67).

- Eğilme momenti (M) diyagramı çizilirken kesme kuvvet diyagramında doğrusal olarak çizilen kısımlar 1. dereceden eğri olarak çizilir. Maximum momentin ( $M_{max}$ ) oluşacağı nokta  $P_1$  ve  $P_2$  kuvveti kesim noktalarıdır. Kesme kuvvet diyagramında  $V_1 = V_2 = 6$  t ve  $V_3 = V_4 = -6$  t olur (Şekil 4.67).

- Kesme kuvvet diyagramında eşit oluşan dikdörtgenin alanı yani moment değeri

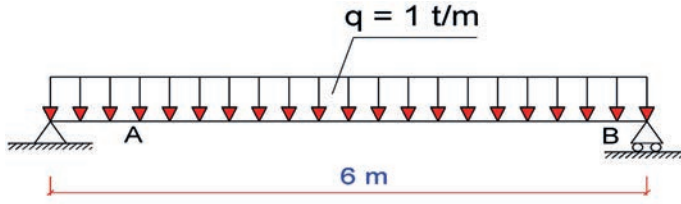
$$M_1 = M_{max} = V_1 \times L_1 = 6 \times 2 = 12 \text{ tm bulunur.}$$

- Eğilme momenti diyagramı 12 tm'lik moment değerleri  $P_1$  ve  $P_2$  kuvvetlerinin etkideği noktalardan işaretlenerek eğilme momenti diyagramı Şekil 4.67'de olduğu gibi çizilir.



Şekil 4.67: İki tekil kuvvet etkisi altındaki basit kiriş mesnet tepkileri N, V ve M diyagramları

**Problem:** Şekil 4.68’de yükleme durumu verilen basit kirişin mesnet tepkilerini hesaplayarak kesme kuvveti (V) ve eğilme momenti (M) diyagramlarını çiziniz.



Şekil 4.68: Düzgün yayılı yük etkisi altındaki basit kiriş

**Çözüm:**

- Basit kirişin oturduğu A ve B mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan, kirişi etkileyen yatay kuvvet olmadığından

$$R_{Ax} = 0 \text{ ve } R_{Bx} = 0 \text{ olur.}$$

Düzgün yayılı yük tekil yüke çevrilirse

$$Q = qxL = 1 \times 6 = 6 \text{ t bulunur.}$$

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan

$$R_{Ay} - 6 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 6 \text{ ton olur.}$$

$\sum M_A = 0$  denge koşulundan

$$Q \cdot 3 - 6 \cdot R_{By} = 0 \text{ Buradan da}$$

$$6 \times 3 - 6 \times R_{By} = 0 \text{ olur.}$$

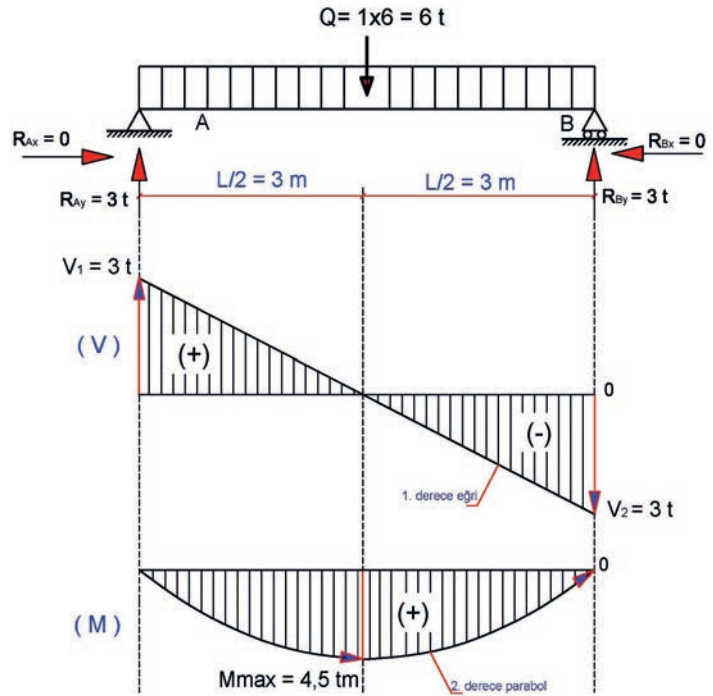
$$6R_{By} = 18 \Rightarrow R_{By} = \frac{18}{6} \text{ ve}$$

$$R_{By} = 3 \text{ ton bulunur.}$$

$R_{Ay} + R_{By} = 6$  ton olduğuna göre

$$R_{Ay} + 3 = 6 \text{ olur. Buradan da}$$

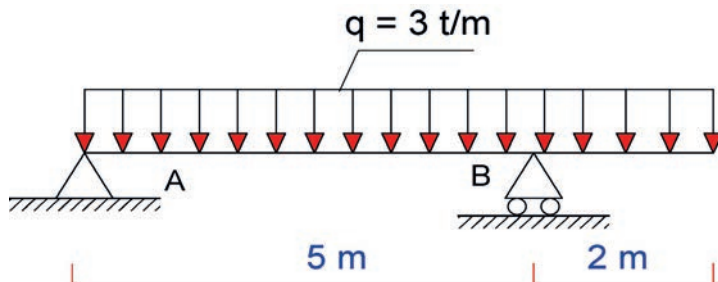
$$R_{Ay} = 6 - 3 \Rightarrow R_{Ay} = 3 \text{ ton bulunur (Şekil 4.69).}$$



Şekil 4.69: Düzgün yayılı yük etkisi altındaki basit kirişin kesme ve moment diyagramları

- Hesaplanan basit kirişin mesnet tepkileri Şekil 4.69’da gösterildiği gibidir.
- Kesme kuvveti (V) diyagramında yukarı yönlü olan kuvvetler yukarı doğru ve aşağı yönlü olan kuvvetler aşağı doğru çizilir. Düzgün yayılı yükün etkilediği kirişin kesme kuvveti diyagramı çizilirken etkiye yönü dikkate alınarak **1. dereceden eğri** şeklinde çizilir (Şekil 4.69).
- Eğilme momenti (M) diyagramı çizilirken kesme kuvveti diyagramında **1. dereceden eğri** olarak çizilen kısımlar **2. dereceden parabol eğrisi** olarak çizilir.
- Maximum momentin ( $M_{max}$ ) oluşacağı nokta düzgün yayılı yükün etkilediği kısmın orta noktasıdır.
- Kesme kuvveti diyagramında  $V_1 = V_2 = 3 \text{ t}$  olur (Şekil 4.69).
- Kesme kuvveti diyagramında eşit oluşan üçgenin alanı yani moment değeri,  $M_1 = M_{max} = (V_1 \times L/2)/2 = 3 \times 3/2 = 4,5 \text{ tm}$  bulunur.
- Eğilme momenti diyagramı 18  $\text{tm}^2$ ’lik moment değerleri Q kuvvetinin etkilediği noktadan işaretlenerek eğilme momenti diyagramı Şekil 4.69’da olduğu gibi çizilir.

**Problem:** Şekil 4.70’te yükleme durumu verilen çıkmalı kirişin mesnet tepkilerini hesaplayarak kesme kuvveti (V) ve eğilme momenti (M) diyagramlarını çiziniz.



Şekil 4.70: Düzgün yayılı yük etkisi altındaki çıkmalı kiriş

- Basit kirişin oturduğu A ve B mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.

Düzgün yayılı yük tekil yüke çevrilirse  $Q = qx(L_1 + L_2) = 3x(5+2) = 21 \text{ t}$  bulunur.

$\sum P_x = 0$  denge koşulundan, kirişi etkileyen yatay kuvvet olmadığından  $R_{Ax} = 0$  ve  $R_{Bx} = 0$  olur.

$\sum P_y = 0$  denge koşulundan,  $R_{Ay} - 21 + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 21 \text{ ton}$  olur.

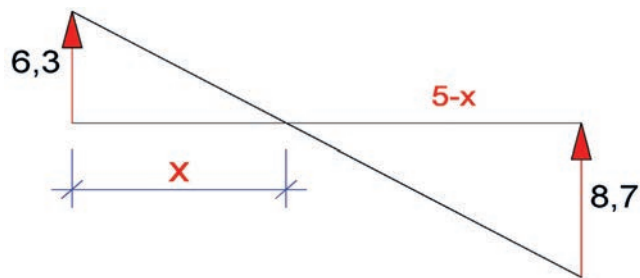
$\sum M_A = 0$  denge koşulundan,  $Q \cdot 3,5 - 5 \cdot R_{By} = 0$  Buradan da  $21 \times 3,5 - 5 \times R_{By} = 0$  olur.

$5R_{By} = 73,5 \Rightarrow R_{By} = \frac{73,5}{5}$  ve  $R_{By} = 14,7 \text{ ton}$  bulunur.

$R_{Ay} + R_{By} = 21 \text{ ton}$  olduğuna göre  $R_{Ay} + 14,7 = 21$  olur. Buradan da  $R_{Ay} = 21 - 14,7 \Rightarrow R_{Ay} = 6,3 \text{ ton}$  bulunur (Şekil 4.72).

### Çözüm:

- Hesaplanan basit kirişin mesnet tepkileri Şekil 4.71’de olduğu gibi gösterilir.
- Kesme kuvveti (V) diyagramında yukarı yönlü olan kuvvetler yukarı doğru ve aşağı yönlü olan kuvvetler aşağı doğru çizilir. Düzgün yayılı yükün etkilediği kirişin kesme kuvveti diyagramı çizilirken etkiye yönü dikkate alınarak **1. dereceden eğri** şeklinde çizilir (Şekil 4.72).



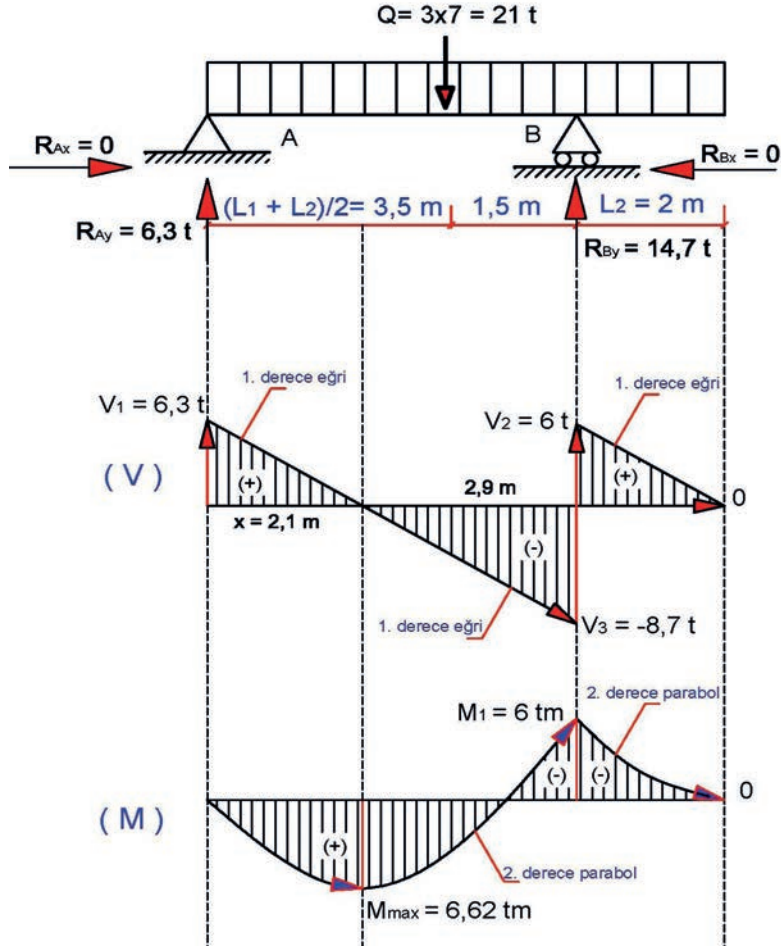
Şekil 4.71: Kesme kuvveti diyagramında x mesafesinin bulunması

- Eğilme momenti (M) diyagramı çizilirken kesme kuvveti diyagramında **1. dereceden eğri** olarak çizilen kısımlar **2. dereceden parabol eğrisi** olarak çizilir (Şekil 4.72).
- Maximum momentin ( $M_{max}$ ) oluşacağı nokta düzgün yayılı yükün etkilediği noktadır.
- Kesme kuvveti diyagramında  $V_1 = 6,3 \text{ t}$ ,  $V_2 = 6 \text{ t}$  ve  $V_3 = -8,7 \text{ t}$  olur (Şekil 4.71, Şekil 4.72).
- Şekil 4.71’de oluşan üçgenler benzer üçgenlerdir. Benzer üçgenlerin **Thales Teoremi** kullanılarak x mesafesi hesaplanır.

$$\frac{6,3}{8,7} = \frac{x}{5-x} \Rightarrow \text{içler dışlar çarpımı yapılırsa } 6,3 \cdot (5-x) = 8,7 \cdot x \text{ buradan da } 31,5 - 6,3x = 8,7x$$

$$15x = 31,5 \text{ eşitliğinden } x = \frac{31,5}{15} = 2,1 \text{ m bulunur. } 5-x \text{ mesafesi de } 5-2,1 = 2,9 \text{ m bulunur.}$$

- Kesme kuvvet diyagramında eşit oluşan üçgenin alanı yani moment değeri  $M_1 = M_{\max} = (V_1 \times L/2)/2 = 6,3 \times 2,1/2 = 6,62 \text{ tm}$  bulunur.
- Eğilme momenti diyagramını 18 tm'lik moment değerleri Q kuvvetinin etkideği noktadan işaretlenerek eğilme momenti diyagramını Şekil 4.72'de olduğu gibi çizilir.

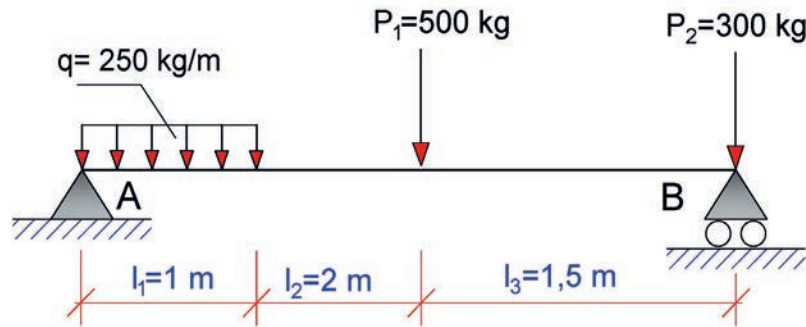


Şekil 4.72: Düzgün yayılı yük etkisindeki çukmalı kirişin kesme kuvveti ve moment diyagramları

Şekil 4.72'de görülen moment diyagramında momentlerden mutlak değerce büyük olan maximum moment olur.

$M_{\max} = 6,62 \text{ tm}$  olarak tespit edilir.

**Problem:** Şekil 4.73'te yükleme durumu verilen basit kirişin mesnet tepkilerini hesaplayarak kesme kuvveti (V) ve eğilme momenti (M) diyagramlarını çizin.



Şekil 4.73: Düzgün yayılı ve tekil yayılı yüklerin etkisi altındaki basit kiriş

**Çözüm:** Yatay yönde herhangi bir kuvvet olmadığından  $\sum P_x = 0$  dan,  $R_{Ax} = 0$  olur. Zaten  $R_{Bx} = 0$  olur. Çünkü B mesnedi hareketlidir. Hareketli mesnetler yatay yönde kuvvetlere karşı tepki göstermezler.

Düzgün yayılı yük tekil yüke çevrilirse  $Q = qx_1 = 250 \times 1 = 250 \text{ kg}$  bulunur.

$$\sum M_A = 0$$

$$Q \cdot l_1/2 + P_1 \cdot (l_1 + l_2) + P_2 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - R_{By} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0$$

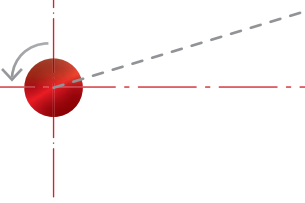
$$250 \cdot 0,5 + 500 \cdot 3 + 300 \cdot 4,5 - R_{By} \cdot 4,5 = 0 \text{ denkleminde } R_{By} = 661,11 \text{ kg} \text{ bulunur.}$$

$$\sum P_y = 0$$

$$R_{Ay} - Q - P_1 - P_2 + R_{By} = 0$$

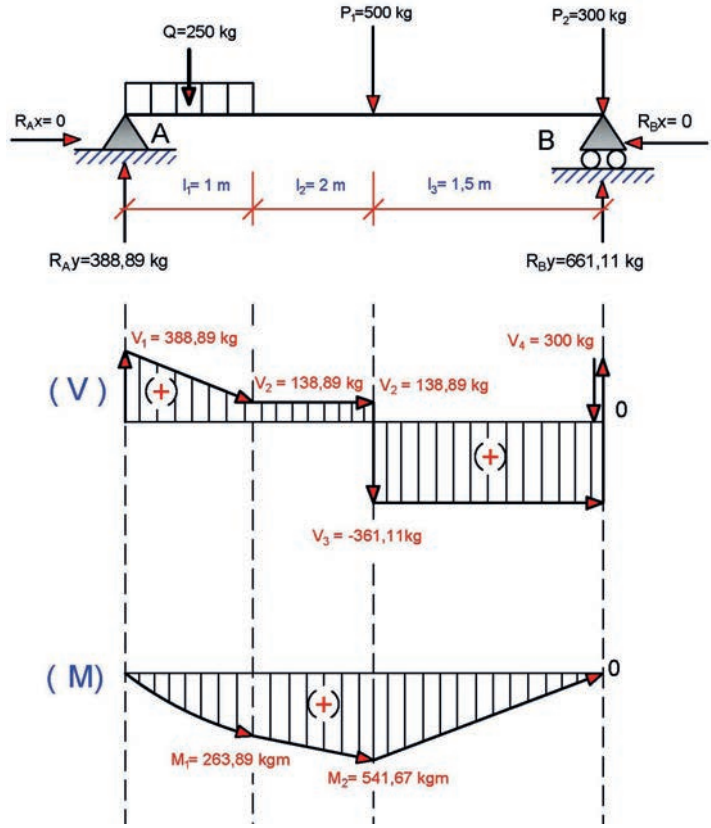
$$R_{Ay} - 250 - 500 - 300 + 661,11 = 0 \text{ denkleminde } R_{Ay} = 388,89 \text{ kg} \text{ bulunur.}$$

- Hesaplanan basit kirişin mesnet tepkileri Şekil 4.74'te olduğu gibi gösterilir.
- Kesme kuvvet (V) diyagramında yukarı yönlü olan kuvvetler yukarı doğru ve aşağı yönlü olan kuvvetler aşağı doğru çizilir. Kirişte boş olan kısımlar kesme kuvvet diyagramı çizilirken doğrusal olarak çizilir. Düzgün yayılı yükün etkilediği kirişin kesme kuvvet diyagramı çizilirken etkiye yönü dikkate alınarak **1. dereceden eğri** şeklinde çizilir (Şekil 4.74).
- Eğilme momenti (M) diyagramı çizilirken kesme kuvvet diyagramında **1. dereceden eğri** olarak çizilen kısımlar **2. dereceden parabol eğrisi** olarak, doğrusal olarak çizilen kısımlar **1. dereceden eğri** şeklinde çizilir (Şekil 4.74).
- Maximum momentin ( $M_{max}$ ) oluşacağı nokta, düzgün yayılı yükün etkilediği noktadır.
- Kesme kuvvet diyagramında  $V_1 = 388,89 \text{ kg}$ ,  $V_2 = 138,39 \text{ kg}$ ,  $V_3 = -361,11 \text{ kg}$ ,  $V_4 = 300 \text{ kg}$  olur (Şekil 4.74).
- Kesme kuvvet diyagramında oluşan yamuğun alanı yani moment değeri  $M_1 = M_{max} = (V_1 + V_2) \cdot x_1/2 = (388,89 + 138,39) \cdot 1/2 = 263,89 \text{ kgm}$  bulunur.
- Kesme kuvvet diyagramında oluşan yamuğun ve dikdörtgenin toplam alanı yani moment değeri  $M_2 = M_1 + V_2 \cdot x_2 = 263,89 + 138,39 \cdot 2 = 541,67 \text{ kgm}$  bulunur.
- Eğilme momenti diyagramı  $M_1$  ve  $M_2$  moment değerleri Q ve  $P_1$  kuvvetinin etkilediği noktadan işaretlenerek eğilme momenti diyagramı Şekil 4.74'te olduğu gibi çizilir.



Şekil 4.74'te görülen moment diyagramında momentlerden mutlak değerce büyük olan maximum moment olur.

$M_2 = M_{\max} = 541,67 \text{ kgm}$  olarak tespit edilir.

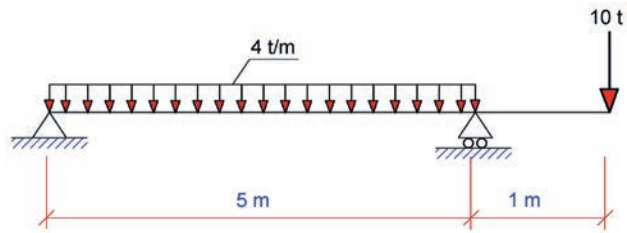


Şekil 4.74: Basit kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramı



### SIRA SİZDE

Şekil 4.75'te yükleme durumu verilen basit kirişin mesnet tepkilerini hesaplayarak kesme kuvveti (V) ve eğilme momenti (M) diyagramlarını çiziniz?



Şekil 4.75: Düzgün yayılı ve tekil yük etkisi altındaki çıkmalı kiriş

8 DERS SAATI

Bu uygulama öğretmen ile yapılacaktır



36153

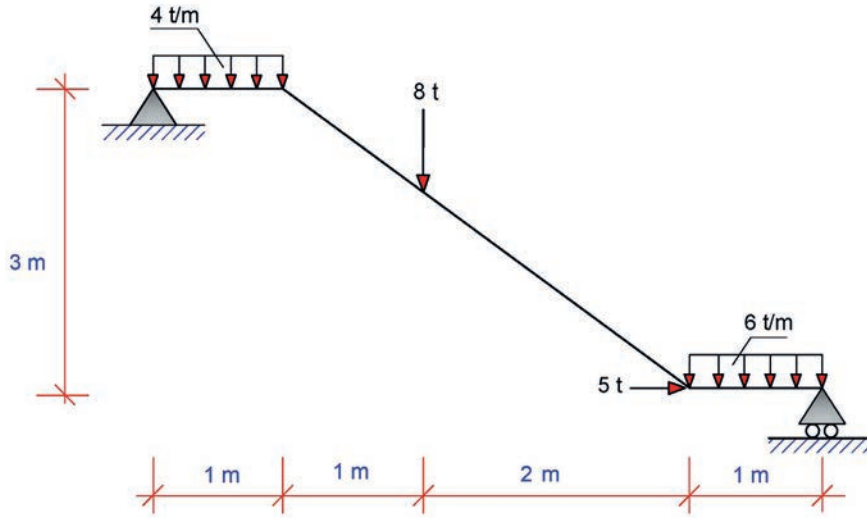
Bu çalışmanın amacı, kirişlerde kuvvet diyagramlarını çizme ile ilgili uygulamalar yapmaktır.

### Görev

Kirişlerde kuvvet diyagramlarını çizme uygulamasını, işlem basamaklarına göre öğretmeninizin gözetiminde yerine getiriniz.

Şekil 4.76'da verilen tek kollu basit merdiven kirişinin

- Mesnet tepkilerini hesaplayınız.
- Normal kuvvet diyagramını çiziniz.
- Kesme kuvvet diyagramını çiziniz.
- Moment diyagramını çiziniz ve maximum moment değerini belirleyiniz.



Şekil 4.76: Düzgün yayılı ve tekil yüklerin etkisi altındaki tek kollu merdiven kirişi

### Yönerge

- Çalışmanızda düzgün yayılı yüklerin tekil yüke çevrilmesine dikkat ediniz.
- Çalışmanızda yatay ve düşey kuvvetlerin etki noktalarına dikkat ediniz.
- Mesnet tepkilerini belirlerken denge koşulları doğrultusunda hesaplamaları hatasız yapmaya dikkat ediniz.
- Normal kuvvet, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çizerken kuvvetlerin türüne ve etki noktalarına dikkat ediniz.
- Çalışmanız uygulama kontrol listesinde verilen ölçütlere göre değerlendirilecektir. Bu ölçütleri kontrol listesinde görebilirsiniz.



## İşlem Basamakları

- Verilen tek kollu basit merdiven kirişin mesnetlerindeki tepki kuvvetleri de gösterilerek serbest cisim diyagramı çizilir.
- Çizilen serbest çizim diyagramında tek kollu basit merdiven kirişindeki 2 adet düzgün yayılı yük tekil yüke çevrilir ve etki mesafeleri gösterilir.
- Tek kollu basit merdiven kirişindeki yatay yöndeki kuvvetlerin denge koşulu ile mesnetlerdeki yatay tepki kuvvetleri bulunur.
- Tek kollu basit merdiven kirişindeki düşey yöndeki kuvvetlerin denge koşulu ile mesnetlerdeki düşey tepki kuvvetlerinin toplamı bulunur.
- Tek kollu basit merdiven kirişine etki eden yatay ve düşey kuvvetlerin sabit mesnet veya hareketli olan mesnedin bulunduğu noktaya göre momentleri alınarak mesnetlerin birindeki düşey tepki kuvveti hesaplanır.
- Tek kollu basit merdiven kirişindeki mesnetlerinin düşey tepki kuvvetlerinin toplamında bulunan iki bilinmeyenli denklemden bulunan mesnetteki düşey tepki kuvveti değeri yerine konular ve diğer mesnetteki düşey tepki kuvveti bulunur.
- Normal kuvvet diyagramında yatay yönlü kuvvetlerden soldan sağa olanlar yukarı yönlü, sağdan sola olan kuvvetler aşağı yönlü olarak çizilerek oluşturulur.
- Kesme kuvvet diyagramında yukarı yönlü olan kuvvetler yukarı doğru ve aşağı yönlü olan kuvvetler aşağı doğru çizilir. Kirişte boş olan kısımlar kesme kuvvet diyagramı çizilirken merdiven kirişine paralel olacak şekilde doğrusal çizilir. Düzgün yayılı yükün etkilediği kirişin kesme kuvvet diyagramı çizilirken etkime yönü dikkate alınarak 1. dereceden eğri şeklinde çizilir ve kesme kuvvet diyagramı oluşturulur.
- Eğilme momenti diyagramı çizilirken kesme kuvvet diyagramında 1. dereceden eğri olarak çizilen kısımlar 2. dereceden parabol eğrisi olarak doğrusal olarak çizilen kısımlar 1. dereceden eğri şeklinde çizilir.
- Maximum momentin ( $M_{max}$ ) oluşacağı nokta düzgün yayılı yükün etkilediği noktasıdır.
- Kesme kuvvet diyagramında bulunan değerler ve oluşan geometrik alanlar hesaplanarak kuvvetlerin etkilediği noktadaki moment değerleri bulunur.
- Eğilme momenti diyagramında oluşan moment değerleri kesme kuvvetlerinin etkilediği noktalardan işaretlenerek eğilme momenti diyagramı çizilir ve en büyük moment yani maximum moment değeri tespit edilir.

### UYGULAMA KONTROLÜ

Bu uygulama kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için “Evet”, kazanamadığınız beceriler için “Hayır” kutucuğuna (X) işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

ÖĞRENCİ UYGULAMA KONTROL LİSTESİ		Evet	Hayır
1	Kirişin mesnetlerindeki tepki kuvvetlerini gösterip serbest cisim diyagramını çizdiniz mi?		
2	Kirişi etkileyen düzgün yayılı yükleri tekil yüke çevirip etki mesafelerini gösterdiniz mi?		
3	Kirişe etki eden yatay yöndeki kuvvetleri dikkate alarak denge koşulu ile mesnetlerdeki yatay tepki kuvvetlerini buldunuz mu?		
4	Kirişe etki eden düşey yöndeki kuvvetleri dikkate alarak denge koşulu ile mesnetlerdeki düşey tepki kuvvetlerinin toplamını buldunuz mu?		



5	Kirişine etki eden yatay ve düşey kuvvetlerin sabit mesnet veya hareketli olan mesnedin bulunduğu noktaya göre momentlerini alarak mesnetlerin birindeki düşey tepki kuvvetini hesapladınız mı?		
6	Kiriş mesnetlerinde oluşan düşey tepki kuvvetlerinin toplamından iki bilinmeyenli denklemde bulunan mesnetteki düşey tepki kuvveti değerini yerine koyup diğer mesnetteki düşey tepki kuvvetini buldunuz mu?		
7	Kesme kuvvet diyagramında yukarı yönlü olan kuvvetleri yukarı doğru ve aşağı yönlü olan kuvvetleri ise aşağı doğru olacak şekilde çizip boş olan kısımların merdiven kirişine paralel olacak şekilde diyagramını doğrusal çizdiniz mi?		
8	Düzgün yayılı yükün etkilediği kirişin kesme kuvvet diyagramını çizerken etkime yönünü dikkate alarak 1. dereceden eğri şeklinde çizdiniz mi?		
9	Eğilme momenti diyagramını çizerken kesme kuvvet diyagramında 1. dereceden eğri olarak çizilen kısımları 2. dereceden parabol eğrisi olarak doğrusal olarak çizilen kısımları ise 1. dereceden eğri şeklinde çizdiniz mi?		
10	Kesme kuvvet diyagramında bulunan değerler ve oluşan geometrik alanlar doğrultusunda kuvvetlerin etkilediği noktadaki moment değerlerini buldunuz mu?		
11	Eğilme momenti diyagramında oluşan moment değerlerini kesme kuvvetlerinin etkilediği noktalardan işaretleyerek eğilme momenti diyagramını çizdiniz mi?		
12	Kirişin moment diyagramındaki en büyük moment olan maximum moment değerini tespit ettiniz mi?		

Aşağıda yer alan değerlendirme puanları, bilgi ve becerilerinizin ölçme değerlendirme işlemlerinde kullanılacağından ön bilgi olması amacıyla verilmiştir. Ana başlıklar hâlinde verilen bilgi, beceri, temizlik/düzen ve süre kullanım ölçütleri; ders öğretmenin hazırlayacağı teorik ve uygulamalı beceri testleri doğrultusunda öğrenme birimi kazanım puanınızın belirlenmesi için kullanılacaktır.

DEĞERLENDİRME					
Değerlendirme Alanları	Bilgi	Beceri	Temizlik/Düzen	Süre Kullanımı	Toplam
Alanları Verilen Puan	20	70	5	5	100
Takdir Edilen Puan					
Öğrencinin Adı Soyadı:			Numarası:		Tarih
					..... / ..... / .....
Öğretmenin Adı Soyadı:			Onay :		

## 4. ÖĞRENME BİRİMİ NOTLARIM

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

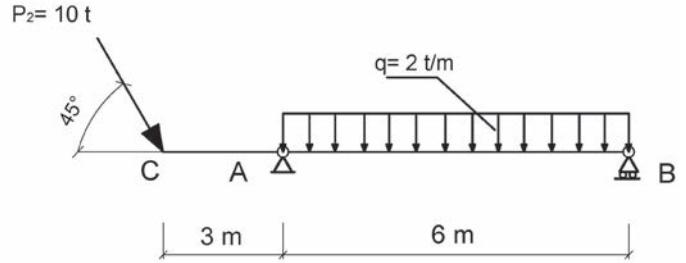
.....

.....

Aşağıda verilen çoktan seçmeli test maddelerinden oluşan soruları cevaplayınız.

1. A ve B mesnetlerine oturan ve açıklıkları verilen izostatik çukmal kiriş şekilde görülen yüklerin etkisi altındadır. Yükleme durumuna göre A mesnedindeki yatay tepki kuvveti ( $R_{Ax}$ ) kaç tondur?

- A) 12  
B) 10  
C) 7,7  
D) 5  
E) 2



2. Düzgün yayılı yükü tekil yüke (Q) çevirmek için aşağıda verilen bağıntılardan hangisi kullanılır?

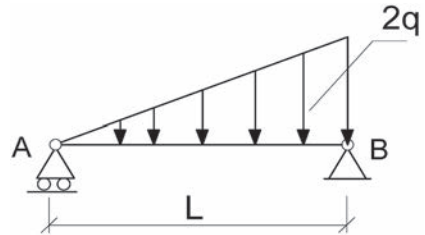
- A)  $q \cdot L/2$   
B)  $q \cdot L$   
C)  $q \cdot L^2$   
D)  $2q \cdot L$   
E)  $2q \cdot L/2$

3. Aşağıda verilenlerden hangisi kirişleri etkileyen yüklerden birisidir?

- A) Elipsoit yayılı  
B) Deltoid yayılı  
C) Küresel yayılı  
D) Çokgen yayılı  
E) Trapez yayılı

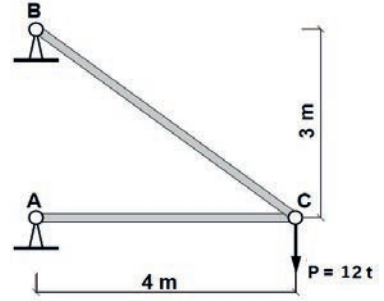
4. Aşağıda A ve B mesnetlerine oturan ve açıklığı "L" olan izostatik basit kiriş, üçgen yayılı yük etkisi altındadır. Yükleme durumu verilen izostatik basit kirişte üçgen yayılı yük miktarı  $2q$  olduğuna göre üçgen yayılı yükün tekil yük değeri seçeneklerin hangisinde doğru verilmiştir?

- A)  $q \cdot L$   
B)  $q \cdot L/2$   
C)  $q \cdot L^2$   
D)  $2q \cdot L$   
E)  $2q \cdot L/3$



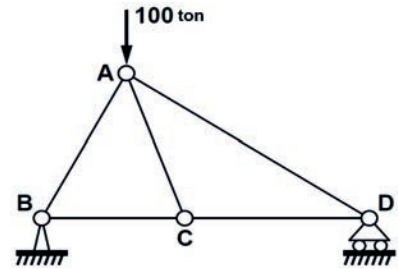
5. Şekildeki kafes kiriş sistemi C noktasında  $P = 12 \text{ t}$  yük etki etmektedir. Yükleme durumuna göre BC çubuğundaki iç kuvvet kaç tondur? (Çekme kuvveti (+), basınç kuvveti (-) olarak ifade edilecektir.)

- A) +20  
B) -20  
C) +12  
D) -12  
E) +24



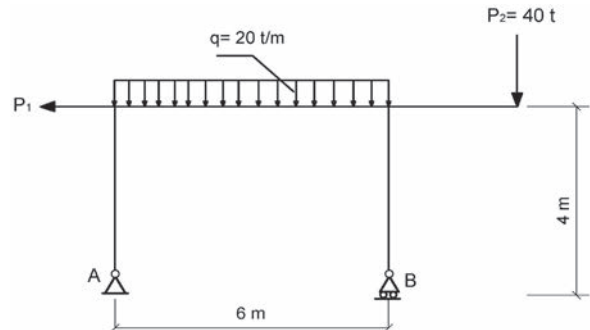
6. Şekildeki kafes kiriş sisteminde AB, AC, BC ve CD çubukları aynı uzunluktadır. Kafes kiriş A noktasına 100 tonluk kuvvet ile etki etmektedir. Verilen yükleme durumuna göre D mesnedindeki düşey yöndeki mesnet tepkisi kaç tondur?

- A) 100  
B) 75  
C) 25  
D) 50  
E) 0



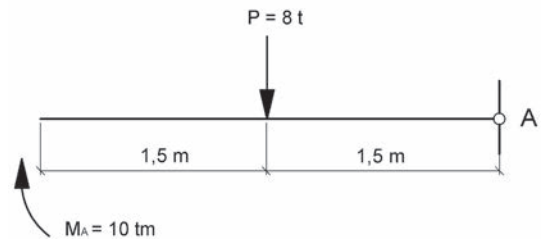
7. Şekilde verilen kolon ve kirişten oluşan çerçeve sistemde A ve B mesnetlerinde düşey tepki kuvvetlerinin birbirine eşit olması için  $P_1$  kuvveti kaç ton olmalıdır?

- A) 1  
B) 20  
C) 30  
D) 40  
E) 50



8. Şekildeki konsol kirişin A ankastre mesnedindeki tepki momentinin büyüklüğü kaç tondur?

- A) 2  
B) 4  
C) 8  
D) 10  
E) 22



9. Birinci dereceden hiperstatik bir sistem olan iki mafsallı çerçeve veya kemere bir ara mafsal eklen-  
diğinde elde edilen sistem .....olarak adlandırılır.

**Yukarıda boşluk bırakılan noktalı yere seçeneklerde verilenlerden hangisi gelmelidir?**

- A) Kafes kiriş sistemi
- B) Gerber kiriş sistemi
- C) Sürekli kiriş sistemi
- D) Çıkmalı kiriş sistemi
- E) Üç mafsallı sistem

10. Gerber kirişlerinin mesnet tepkileri genel olarak denge denklemlerine .....kadar  
eklenecek denklemlerle bulunur.

**Yukarıda boşluk bırakılan noktalı yere seçeneklerde verilenlerden hangisi gelmelidir?**

- A) Sabit mesnet
- B) Ankastre mesnet
- C) Hareketli mesnet
- D) Ara mafsal
- E) Gerber mafsal



Ölçme Değerlendirme sorularını cevaplamayı tamamladıysanız kitabın sonunda verilen cevap anahta-  
rından cevaplarınızı kontrol edebilirsiniz. Yanlış cevapladığınız soruları öğretmenize sorunuz.



110 - 112 - 122 - 155 - 156 - 177  
TEK NUMARADA BİRLEŞTİ!



# SÖZLÜK

## A

**açıölçer**

: İletki.

**alfa** : Matematik, fen bilimleri ve mühendislik bilimlerinde açı sembolü olarak kullanılan Yunan alfabesinin ilk harfi.

## B

**beta** : Matematik, fen bilimleri ve mühendislik bilimlerinde açı sembolü olarak kullanılan Yunan alfabesinin ikinci harfi.

**bileşen** : Bir bileşkeyi oluşturan kuvvetlerin her biri.

**bileşke** : Bir cisme uygulanan birkaç kuvvetin toplam etkisine eşit olan tek kuvvet.

## C

**cebirsel** : Cebirle ilgili.

**cisim** : Doğada element, bileşik veya bunların karışımları hâlinde bulunan, kütlesi ve ağırlığı olan, duyuyla algılanabilen şey.

## D

**denge** : Bir nesnenin veya bir insanın devrilmeden durma hâli, muvazene, balans.

**diyagram** : Herhangi bir olayın değişimini gösteren grafik.

**düşey** : Yer çekimi doğrultusunda olan.

## E

**eksen** : Bir cismi iki eşit parçaya bölen çizgi.

**Ekvator** : Yer yuvarlağının eksenine dik olarak geçtiği ve yer yuvarını iki eşit parçaya böldüğü varsayılan en büyük çember.

**evren** : Gök varlıklarının bütünü.

## F

**füniküler** : Çekmeli vagon.

**fi** : Matematikte açı ve farklı değişkenlerin gösteriminde kullanılan Yunan alfabesinin yirmi birinci harfi.

## G

**gel git** : Ay ve Güneş'in yer yuvarlağı üzerindeki çekim güçleri sebebiyle deniz yüzünde, özellikle ana denizlerde su düzeyinin alçalması, kabarması olayı, metcezir.

## I-İ

- izdüşüm** : Uzaydaki bir cismin görüntüsünü bir düzlem içerisinde elde etmek için kabul edilen; nokta, doğru, yüzey ve cisimlerin x, y ve z eksenlerindeki görünümünün ifade edilmesi.
- ivme** : Hareket eden nesnenin kısa bir zaman içinde, hızında oluşan değişimin bu zamana oranı.

## K

- kiriş** : Yapılarda kadron adı verilen keresteden, demirden veya betonarmeden yapılmış yatay destek parçası.
- koordinat** : Bir yüzey üzerindeki veya uzaydaki bir noktanın yerini ifade eden, ana çizgilerden yatay olanı apsis ve düşey olanı ordinat olarak adlandırılan noktasal konumu belirten sistem.
- kutup** : Yer yuvarlığının, Ekvator'dan en uzak olan yer ekseninin geçtiği varsayılan iki noktasından her biri.
- kuvvet** : Fiziksel güç.
- kütle** : Bir nesneye uygulanan kuvvetle, oluşan ivme arasındaki orantıyı veren katsayı veya nesne niceliği.

## M

- mesnet** : Dayanak.
- metot** : Yöntem.
- moment** : Kuvvetin, bir cismi bir nokta veya bir eksen yörüngesinde döndürme etkisini belirleyen vektörel niceliği.

## T

- teorem** : Kanıtlanabilen bilimsel önerme.

## V

- vektör** : Doğrultusu, yönü, uzunluğu belirli olan ve bir ok işaretiyle gösterilen doğru çizgi.

## Y

- yapı** : Barınmak veya başka amaçlarla kullanılmak için yapılmış her türlü mimarlık eseri, bina.

# KAYNAKÇA

1. AYKUTLU Ali, Hasan Gönül, Statik ve Yapı Hesapları, MEB Basımevi, İstanbul, 1987.
2. BEER Ferdinand P. , JOHNSTON E. Russell, Mühendisler İçin Mekanik Statik, İstanbul, 1998.
3. İNAN Mustafa, Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ Vakfı, İstanbul, 1996.
4. KARATAŞ, Hasan, ÖZKAN İŞLER, Mühendislik Mekaniğinde Statik Problemleri, İstanbul, 2014.
5. W. G. McLEAN, E. W. Nelson, Teori ve Problemlerle Mühendislik Mekaniği Statik ve Dinamik, Ankara, 1979.
6. Mesleki ve Teknik Eğitim Genel Müdürlüğü, İnşaat Teknolojisi Alanı Yapı Statik Hesapları Ders Bilgi Formu, Ankara, 2020.
7. Mesleki ve Teknik Eğitim Genel Müdürlüğü, İnşaat Teknolojisi Alanı Çerçeve Öğretim Programı, Ankara, 2020.

## GENEL AĞ KAYNAKÇA

1. <https://web.itu.edu.tr/kimence/sta201-4.pdf> (Erişim: 16.10.2021, 22.35).
2. <https://www.erbakan.edu.tr/storage/files/department/insaatmuhendisligi/editor/DersSayfaları/Statik/YayiliYukveAgirlikMerkezi.pdf> (Erişim: 15.11.2021, 20.52).
3. <http://www.ibrahimcayiroglu.com/Dokumanlar/StatikMukavemet/StatikMukavemet-1.Hafta.pdf> (Erişim: 12.12.2021, 19.40).

## GÖRSEL KAYNAKÇASI

<http://kitap.eba.gov.tr/karekod/Kaynak.php?KOD=2299>



# CEVAP ANAHTARI

## KUVVET VE BİLEŞKE HESAPLARI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	E	D	C	E	A	B	D	C

## DENGE VE MOMENT HESAPLARI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	E	A	B	D	A	E

## AĞIRLIK MERKEZİ HESAPLARI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	C	B	E	D	A	E	A

## MESNETLERDE-KİRİŞLERDE TEPKİ KUVVETLERİ VE DİYAGRAMLAR

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	E	A	B	C	D	A	E	D